



①

فاصله دو نقطه به طول‌های ۱ و ۴ روی نمودار $y = \sqrt{x}$ از هم کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $3\sqrt{2}$

②

خط $L: 2x - 5y = 3$ بر دایره‌ای به مرکز $W(3, -2)$ مماس است. مساحت دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{81\pi}{29}$ (۲) $\frac{49\pi}{29}$ (۳) $\frac{196\pi}{29}$ (۴) $\frac{169\pi}{29}$

③

اگر $A(2, 5)$ و $B(4, 1)$ باشند، فاصله نقطه وسط پاره خط AB از خط $3x + 4y = 1$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

④

اگر نقطه $(3, 4)$ وسط پاره‌خطی باشد که یک سر آن روی محور طول‌ها و سر دیگر آن روی محور عرض‌ها قرار دارد، در این صورت معادله خط گذرنده از این سه نقطه کدام است؟

- (۱) $3x + 2y - 12 = 0$ (۲) $3y + 4x - 24 = 0$ (۳) $3y + 2x - 12 = 0$ (۴) $3x + 4y - 24 = 0$

⑤

خطی که از نقطه $(2, -1)$ گذشته و بر خط $2x + 4y = 3$ عمود است، از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(3, 7)$ (۲) $(-2, 1)$ (۳) $(5, 5)$ (۴) $(1, -1)$

⑥

دو ضلع مربعی بر خطوط $4y = 2 - 3x$ و $1 - y = \frac{3x}{4}$ واقع می‌شوند. اندازه قطر مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ (۲) $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ (۴) $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

⑦

فاصله‌ی نقطه‌ی $(3, 2)$ از خط به معادله‌ی $x + y + 1 = 0$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{3}$ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) ۶ (۴) $6\sqrt{2}$

۸

فاصله نقطه $B(-4, 3)$ از مبدأ مختصات و همچنین از نقطه A واقع بر محور طول‌ها به یک اندازه است. مقادیر ممکن برای طول نقطه A کدام است؟

- (۱) صفر و ۸- (۲) صفر و ۸ (۳) صفر و ۲ (۴) ۸ و ۸-

۹

در یک مثلث قائم‌الزاویه به طول اضلاع قائمه $6\sqrt{3}$ و $3\sqrt{6}$ ، فاصله بین پای ارتفاع و پای میانه وارد بر ضلع بزرگتر چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- (۱) ۲ (۲) $1/25$

- (۳) $1/5$ (۴) $1/75$

۱۰

سهمی $y = -x^2 + 2x + 1$ خط راست گذرا از نقطه $(1, 0)$ و با عرض از مبدأ ۱- را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر M وسط پاره‌خط AB باشد، فاصله رأس سهمی از نقطه M ، کدام مضرب $\sqrt{26}$ است؟

- (۱) ۲ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۱

اگر نقاط $A(2, 3)$ ، $B(5, -1)$ و $C(1, 1)$ رأس‌های یک مثلث باشند، معادله خطی که میانه AM روی آن قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $y = -3x + 9$ (۲) $y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}$ (۳) $y = -3x + 3$ (۴) $y = -\frac{3}{2}x + 6$

۱۲

اگر $A(2, 4)$ و $B(-4, 2)$ ، آنگاه عمود منصف پاره‌خط AB ، محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) صفر

۱۳

نقاط $A(-5, -2)$ و $B(3, 6)$ دو سر یک پاره خط می‌باشند. کدام یک از نقاط زیر از دو سر پاره خط A و B به فاصله یکسان قرار دارد؟

- (۱) $(\sqrt{2} + 2, -\sqrt{2} - 3)$ (۲) $(2\sqrt{2}, \sqrt{2} + 1)$
(۳) $(1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$ (۴) $(\sqrt{2} + 3, -\sqrt{2} - 3)$

۱۴

معادله سه ضلع مثلثی $x = 2$ ، $y = -1$ و $y + 2x = 9$ می‌باشد. معادله میانه وارد بر بلندترین ضلع این مثلث کدام است؟

- (۱) $y = 2x - 5$ (۲) $y = 2x - 3$ (۳) $y = 3x - 5$ (۴) $y = 3x - 3$

۱۵

اگر نقاط $A(۲, ۳)$ ، $B(۶, ۲k - ۳)$ و $C(k, -۱)$ رئوس مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = ۹۰^\circ$) باشند، فاصله پای میانه وارد بر وتر تا مبدأ مختصات چقدر است؟

(۱) $\sqrt{۲۶}$ (۲) $\sqrt{۲۹}$

(۳) $\sqrt{۳۴}$ (۴) $\sqrt{۳۷}$

۱۶

اگر $A(۵, ۱)$ و $B(۳, ۳)$ باشند، فاصله وسط پاره‌خط AB از خط $۳x - ۴y + ۲ = ۰$ کدام است؟

(۱) ۵ (۲) $۶\sqrt{۵}$ (۳) $\frac{۶}{۵}$ (۴) $\frac{۶\sqrt{۵}}{۵}$

۱۷

خط d محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۲ و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع می‌کند. نقطه برخورد این خط با خط گذرنده از مبدأ مختصات و نقطه $\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ کدام است؟

(۱) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \\ ۶ \\ ۵ \end{bmatrix}$ (۲) $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \\ ۶ \\ ۵ \end{bmatrix}$ (۳) $\begin{bmatrix} -۲ \\ ۵ \\ -۶ \\ ۵ \end{bmatrix}$ (۴) $\begin{bmatrix} ۲ \\ ۵ \\ -۶ \\ ۵ \end{bmatrix}$

۱۸

قرینه نقطه $A(۳, -۲)$ نسبت به نقطه وسط پاره‌خط BC با فرض $B(۵, ۱)$ و $C(۱, ۳)$ کدام است؟

(۱) $(۳, -۶)$ (۲) $(۳, ۶)$ (۳) $(۲, ۳)$ (۴) $(۱, ۶)$

۱۹

اگر طول پاره‌خطی که از تقاطع خط $y = ax$ با خطوط $y = ۲$ و $y = ۶$ پدید می‌آید کمتر از ۵ باشد، حدود a کدام است؟

(۱) $-\frac{۴}{۳} < a < \frac{۴}{۳}$ (۲) $-\frac{۳}{۴} < a < \frac{۳}{۴}$
(۳) $a > \frac{۴}{۳}$ یا $a < -\frac{۴}{۳}$ (۴) $a > \frac{۳}{۴}$ یا $a < -\frac{۳}{۴}$

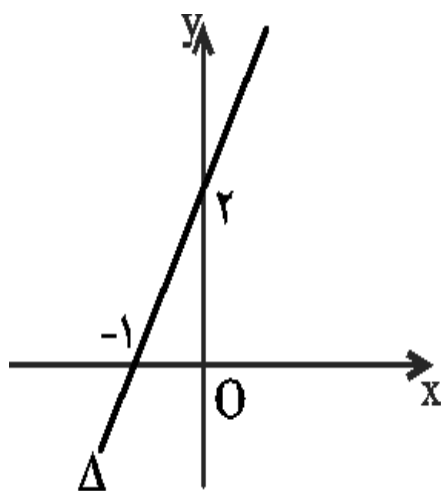
۲۰

مثلثی با رأس‌های $A(۱, ۵)$ ، $B(۷, ۳)$ ، $C(۲, -۳)$ مفروض است. اندازه ارتفاع AH در مثلث ABC ، کدام است؟

(۱) ۴ (۲) $۳\sqrt{۲}$ (۳) ۵ (۴) $۴\sqrt{۲}$

۲۱

در شکل مقابل، فاصله مبدأ مختصات از خط Δ کدام است؟

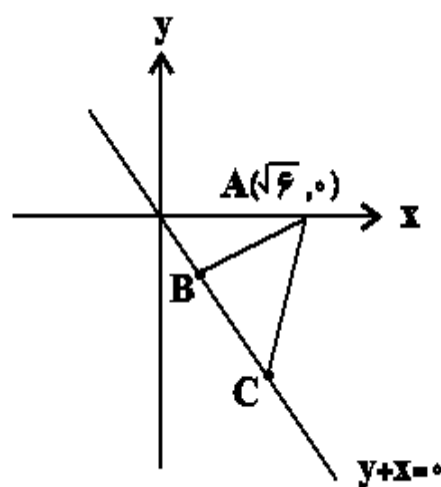


(۱) $\frac{\sqrt{5}}{5}$
(۳) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(۲) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
(۴) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

۲۲

در شکل مقابل مثلث ABC متساوی الاضلاع است. مساحت این مثلث چقدر است؟



(۱) ۳
(۲) $\sqrt{3}$
(۳) ۹
(۴) $2\sqrt{3}$

۲۳

اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ رأس‌های یک مثلث باشند، طول ارتفاع AH کدام است؟

(۱) $2\sqrt{3}$
(۲) $3\sqrt{2}$
(۳) ۴
(۴) ۳

۲۴

فاصله دو خط $L_1: y - x + a = 0$ و $L_2: y - x + 2a = 0$ برابر $2\sqrt{2}$ است، اگر این دو خط از ناحیه چهارم عبور نکنند، a کدام است؟

(۱) -۱
(۲) -۴
(۳) -۲
(۴) -۳

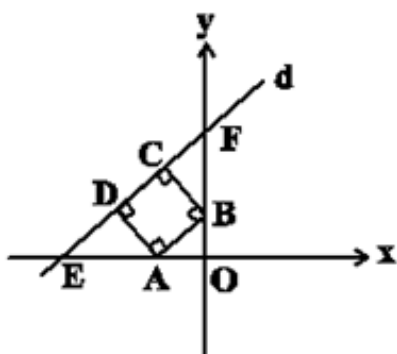
۲۵

فاصله دو خط به معادلات $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

(۱) $2 - \sqrt{3}$
(۲) $\sqrt{3} - 1$
(۳) $\sqrt{3} + 1$
(۴) $2 + \sqrt{3}$

۲۶

در شکل مقابل ABCD مربع است. اگر $A(-1, 0)$ و $B(0, 1)$ باشد، کدام نقطه زیر روی خط d (گذرنده از C و D) قرار دارد؟



(۱) $(-2, -3)$

(۲) $(-2, -11)$

(۳) $(-2, 1)$

(۴) $(-2, 5)$

۲۷

محیط مثلث ABC با فرض $A(2, 4)$ ، $B(2, 1)$ و $C(-2, 4)$ کدام است؟

(۴) $9 + 2\sqrt{3}$

(۳) ۱۲

(۲) $7 + 2\sqrt{3}$

(۱) ۱۰

۲۸

اگر خطوط $y = (k + 2)x + 3$ و $ky - x - 5 = 0$ معادلات قطرهای یک مربع باشند، فاصله نقطه تلاقی دو قطر مربع از مبدأ مختصات کدام است؟

(۴) $\sqrt{19}$

(۳) $\sqrt{18}$

(۲) $\sqrt{17}$

(۱) $\sqrt{15}$

۲۹

مجموع طول نقاطی از نیمساز ناحیه دوم یا چهارم که از نقطه $A(-1, 2)$ به فاصله ۲ هستند، کدام است؟

(۴) -۴

(۳) -۳

(۲) -۲

(۱) -۱

۳۰

خط $2x + y - 4 = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(-1, 1)$ مماس است. اندازه شعاع دایره کدام است؟

(۴) $\sqrt{5}$

(۳) $2\sqrt{5}$

(۲) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(۱) $\frac{1}{5}$

۳۱

نقاط $A(1, 0)$ ، $B(6, 0)$ و $C(2, 2)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر CD نیمساز داخلی زاویه C باشد، مختصات D کدام است؟ (D محل برخورد نیمساز C^A با ضلع AB است.)

(۴) $(\frac{7}{3}, 0)$

(۳) $(\frac{10}{3}, 0)$

(۲) $(3, 0)$

(۱) $(\frac{8}{3}, 0)$

۳۲

اگر $A(2, 5)$ و $M(-2, 1)$ باشند، فاصله قرینه نقطه A نسبت به M از مبدأ مختصات کدام است؟

(۴) ۹

(۳) $5\sqrt{2}$

(۲) $3\sqrt{5}$

(۱) $2\sqrt{5}$

۳۳

خطوط به معادلات $y - 4 = 0$ و $x = \frac{y}{2} + 3$ از دو ضلع متوازی الاضلاعی می‌گذرند و مختصات دو رأس متوازی الاضلاع نقاط $A(2, 4)$ و $B(1, 2)$ می‌باشد. مختصات نقطه برخورد قطرهای متوازی الاضلاع کدام است؟

- (۱) $(\frac{3}{2}, 3)$ (۲) $(2, 2)$ (۳) $(3, 3)$ (۴) $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$

۳۴

فاصله نقطه تلاقی‌های منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ با مبدأ مختصات، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{6}$ (۳) $2\sqrt{3}$ (۴) $\sqrt{15}$

۳۵

مساحت مثلثی که خط $4x - 5y = -20$ با محورهای مختصات می‌سازد، کدام است؟

- (۱) ۲۰ (۲) ۳۰ (۳) ۱۰ (۴) ۴۰

۳۶

هرگاه نقاط $B|_1^3$ و $D|_7^0$ دو رأس مقابل لوزی باشند، خط منطبق بر قطر این لوزی، محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) ۳ (۲) $3/25$ (۳) ۴ (۴) $4/25$

۳۷

خط گذرنده بر دو نقطه $(-2, 3)$ و $(7, -3)$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $3/5$ (۴) $2/5$

۳۸

دو خط به معادلات $ay - x = -7$ و $a^3x + y = 2$ بر دو ضلع مربعی منطبق‌اند. در این صورت برای a چند جواب وجود دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۹

دو دایره با شعاع‌های برابر که مختصات مراکز آنها $(2, -1)$ و $(0, 3)$ است، در یک نقطه برهم مماس‌اند. شعاع هر یک از دایره‌ها کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $2\sqrt{5}$ (۳) $\sqrt{5}$ (۴) $2\sqrt{10}$

۴۰

خط $4x + 3y = 5$ بر دایره C به مرکز $O(a, 2)$ مماس است. اگر مساحت دایره $\frac{9\pi}{25}$ باشد، مقدار صحیح a کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۴۱

نقاط $A(1, 0)$ ، $B(4, 2)$ و $C(3, -3)$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند، در مورد مثلث ABC می‌توان گفت که ...

- (۱) متساوی‌الساقین است، قائم‌الزاویه نمی‌باشد.
 (۲) متساوی‌الاضلاع است.
 (۳) قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.
 (۴) قائم‌الزاویه است ولی متساوی‌الساقین نیست.

۴۲

نقطه $A(-1, 1)$ یک رأس و AB یک ضلع مربع هستند. اگر معادله یک قطر مربع $2x + y = 2$ باشد، مختصات رأس B کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $(3, -1)$ (۲) $(1, 0)$ (۳) $(2, 2)$ (۴) $(0, 2)$

۴۳

نقاط $A(4, 2)$ ، $B(1, -1)$ و $C(6, -1)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر AH ، ارتفاع و AM ، میانه وارد بر ضلع BC باشند، طول MH چقدر است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (۳) ۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۴۴

نقطه A روی نیمساز ناحیه دوم قرار دارد و از خط $y = 2x - 1$ به فاصله $\sqrt{5}$ است. فاصله نقطه A از مبدأ مختصات چند برابر $\sqrt{2}$ است؟

- (۱) $\frac{4}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) ۶

۴۵

نقاط $A(1, 5)$ ، $B(2, -1)$ و $C(-6, 3)$ سه رأس یک مثلث‌اند. خطی که میانه AM روی آن قرار می‌گیرد، محور y ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- (۱) $\frac{11}{2}$ (۲) $\frac{5}{11}$ (۳) $\frac{11}{3}$ (۴) $\frac{1}{11}$

۴۶

دو ضلع OC و OA از متوازی الاضلاع $OABC$ به ترتیب روی محور x ها و نیمساز ربع اول واقع اند و مختصات رأس B به صورت $B(3, 2)$ است. مجموع طول و عرض رأس C کدام است؟ (0 مبدأ مختصات است.)

- (۱) ۲
(۲) ۱
(۳) ۳
(۴) ۴

۴۷

فاصله دو خط $4x + 2y = 5$ و $y = -2x + 1$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{5}}{10}$
(۲) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
(۳) $\frac{3\sqrt{5}}{10}$
(۴) $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

۴۸

خطی که از نقاط متمایز $A(m, -1)$ و $B(1, 1 - 2m)$ می‌گذرد. محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کرده است. این خط محور x ها را با چه طولی قطع می‌کند؟

- (۱) -۲
(۲) ۱
(۳) -۱/۵
(۴) -۲/۵

۴۹

به ازای کدامیک از مقادیرهای زیر برای m ، خطوط $3x + (m + 2)y = 3$ و $2x - (m + 3)y + 6 = 0$ منطبق بر قطرهای یک لوزی می‌باشند؟

- (۱) -۱
(۲) -۴
(۳) ۱
(۴) -۵

۵۰

فاصله نقطه $(-2, 1)$ از خط $3y = 4x - 1$ کدام است؟

- (۱) ۱/۸
(۲) ۱/۹
(۳) ۲/۱
(۴) ۲/۴

۵۱

اگر قرینه نقطه $A(3, -a)$ نسبت به نقطه $B(a, 2)$ روی خط $y = x + 5$ قرار گیرد، اندازه پاره خط AB چقدر است؟

- (۱) $\sqrt{15}$
(۲) $\sqrt{17}$
(۳) $\sqrt{19}$
(۴) $\sqrt{13}$

۵۲

نقاط $A(-3, -1)$ ، $B(-3, 7)$ و $C(3, 3)$ سه رأس مثلثی می‌باشند. این مثلث چگونه است؟

- (۱) متساوی‌الاضلاع
(۲) فقط متساوی‌الساقین
(۳) فقط قائم‌الزاویه
(۴) متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه

۵۳

نقطه $H(2, 1)$ را روی خط $3x - y = 5$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث $\sqrt{270}$ واحد باشد، مختصات یک رأس A ، کدام است؟

- (۱) $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$ (۲) $(\frac{13}{2}, \frac{-1}{2})$ (۳) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ (۴) $(-\frac{1}{2}, \frac{11}{6})$

۵۴

یکی از اضلاع مربعی بر خط $2y + 3x = 1$ واقع است. اگر $A(3, 1)$ یکی از رئوس این مربع باشد، محیط مربع کدام است؟

- (۱) $\frac{40\sqrt{13}}{13}$ (۲) ۴۰ (۳) ۸۰ (۴) $\frac{20\sqrt{13}}{13}$

۵۵

خط به معادله $4x - 2y + 8 = 0$ محورهای مختصات را در نقاط A و B قطع می‌کند. اگر $M(a, b)$ مختصات نقطه وسط پاره خط AB باشد، حاصل $a + b$ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۵۶

در مثلث ABC با رئوس $A(1, 5)$ ، $B(-1, 0)$ و $C(3, -4)$ ، فاصله بین پای ارتفاع AH و نقطه میانی ضلع AB کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{29}}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{29}}{4}$ (۳) $\frac{2}{\sqrt{29}}$ (۴) $\frac{4}{\sqrt{29}}$

۵۷

اگر $A(2, -4)$ ، $B(6, -2)$ و $C(12, 6)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول پاره‌خطی که وسط دو ضلع AB و AC را به هم وصل می‌کند، کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

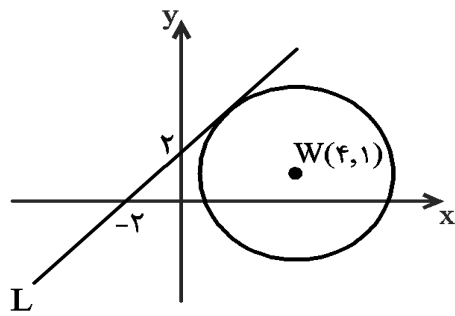
۵۸

نقطه A بر روی خط $2x - y + 1 = 0$ و نقاط $M(1, -2)$ و $N(3, -4)$ مفروضند. اگر پاره‌خط‌های MA و NA هم‌راستای هم باشند، آنگاه مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) -۲

۵۹

با توجه به شکل زیر، شعاع دایره چند برابر $\sqrt{2}$ است؟



(۱) ۲/۵

(۲) ۲

(۳) ۳

(۴) ۳/۵

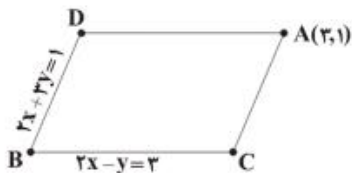
۶۰

نقاط $A(-۳, -۱)$ ، $B(-۳, ۷)$ و $C(۳, ۳)$ سه رأس مثلثی هستند. این مثلث چگونه است؟

(۱) متساوی الاضلاع (۲) فقط متساوی الساقین (۳) فقط قائم الزاویه (۴) متساوی الساقین و قائم الزاویه

۶۱

در متوازی الاضلاع روبه‌رو، عرض نقطه D کدام است؟ (خطوط فرضی‌اند).



(۱) -۱

(۲) ۱

(۳) صفر

(۴) ۲

۶۲

خط گذرنده از دو نقطه $(۳, -۲)$ و $(۷, -۳)$ محور xها را با کدام طول قطع می‌کند؟

(۴) ۲/۵

(۳) ۳/۵

(۲) ۲

(۱) ۱

۶۳

فاصله نقطه $A(-۲, ۱)$ از محل برخورد دو خط $y = ۳x + ۱$ و $y = x + ۷$ کدام است؟

(۴) $۲\sqrt{۳}$

(۳) $۳\sqrt{۲}$

(۲) ۶

(۱) ۵

۶۴

اگر $A(۲, ۴)$ و $B(-۴, ۲)$ باشند، فاصله نقطه وسط پاره خط AB از نقطه $C(-۲, ۱)$ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) $\sqrt{۱۰}$

(۲) $\sqrt{۵}$

(۱) $\sqrt{۱۳}$

۶۵

معادله خطی که محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳ قطع کرده و از نقطه‌ای به عرض ۲ روی خط $y = 2x - 2$ می‌گذرد، کدام است؟

(۴) $y = -2x + 2$

(۳) $y = 2x$

(۲) $y = 2x + 4$

(۱) $y = -2x + 6$

۶۶

نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت این مربع کدام است؟

(۴) ۸۰

(۳) ۷۵

(۲) ۴۵

(۱) ۴۰

۶۷

دو نقطه بر روی خط به معادله $y = x - 4$ قرار دارند و فاصله آن نقاط از خط به معادله $5y - x = 2$ برابر $\sqrt{26}$ می‌باشد. مجموع طول آن دو نقطه کدام است؟

(۴) ۱۲

(۳) ۱۱

(۲) ۱۰

(۱) ۱۳

۶۸

قرینه نقطه $A(3, -1)$ نسبت به نقطه $M(2, 3)$ کدام است؟

(۲) $(1, 5)$

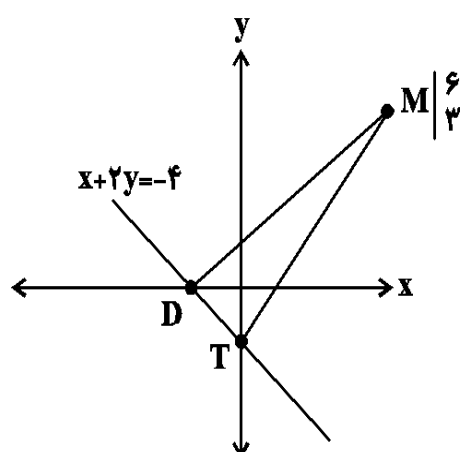
(۱) $(-1, 5)$

(۴) $(-1, 7)$

(۳) $(1, 7)$

۶۹

در شکل مقابل اندازه مساحت مثلث DMT چقدر است؟



(۱) ۱۶

(۲) ۳۲

(۳) ۴

(۴) ۱۸

۷۰

نقطه $M(2, 3)$ وسط پاره‌خط AB است. اگر $A(1, 4)$ باشد، فاصله نقطه B تا مبدأ مختصات کدام است؟

(۴) $\sqrt{17}$

(۳) $\sqrt{14}$

(۲) $\sqrt{13}$

(۱) $\sqrt{10}$

۷۱

کدام خط بر خط $3x + 4y = 16$ عمود بوده و فاصله نقطه $(1, 1)$ از آن برابر ۳ است؟

(۲) $4x + 3y + 16 = 0$

(۱) $-4x + 3y - 16 = 0$

(۴) $4x + 3y = 16$

(۳) $-4x + 3y = -12$

۷۲

دو خط $AB : y = 3x$ ، $BC : 3y + x = 10$ و محور x ها، معادلات اضلاع مثلث ABC هستند. معادله میانه وارد بر ضلع AC کدام است؟

(۲) $y = -\frac{3}{4}(x + 5)$

(۱) $y = \frac{3}{4}(x + 5)$

(۴) $y = \frac{3}{4}(x - 5)$

(۳) $y = -\frac{3}{4}(x - 5)$

۷۳

عرض از مبدأ خطی که در نقطه $(3, 4)$ بر دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات مماس باشد، برابر کدام است؟

(۴) $2/52$

(۳) $3/21$

(۲) $5/12$

(۱) $6/25$

۷۴

نقاط $P(a, a)$ ، $A(1, -1)$ و $B(-3, -4)$ مفروض هستند. اگر فاصله نقطه P از پاره خط AB برابر ۲ باشد، در این صورت مقدار a کدام است؟

(۴) 12

(۳) فقط -17

(۲) فقط 3

(۱) 3 یا -17

۷۵

خط گذرنده از دو نقطه $A(m - 1, 2)$ و $B(1, 4)$ بر خط $2y + 3x = 1$ عمود است، m کدام است؟

(۴) -2

(۳) -1

(۲) 2

(۱) 1

۷۶

A' قرینه نقطه $A(2, 1)$ نسبت به خط $y = x + 1$ است. مختصات A' کدام است؟

(۴) $(3, -1)$

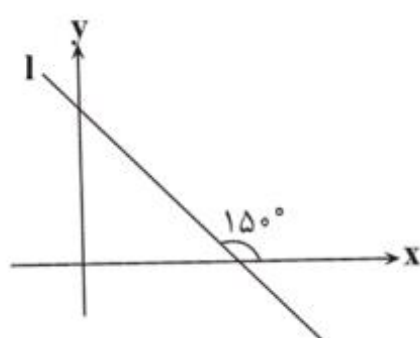
(۳) $(-1, 3)$

(۲) $(-1, 2)$

(۱) $(0, 3)$

۷۷

معادله خط d که بر خط l عمود بوده و از نقطه $(\sqrt{3}, 1)$ عبور می‌کند، کدام است؟



(۱) $y + \frac{\sqrt{3}}{3}x = 2$

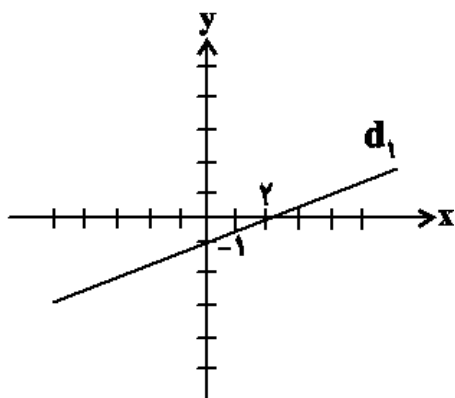
(۲) $y + \sqrt{3}x = 4$

(۳) $3y = \sqrt{3}x$

(۴) $y + 2 = \sqrt{3}x$

۷۸

خطی که با خط d_1 در شکل مقابل موازی است و محور y ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع می‌کند، از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟



- (۱) $(4, 6)$
- (۲) $(4, -1)$
- (۳) $(2, 4)$
- (۴) $(2, -2)$

۷۹

اگر $A(4, 1)$ و $C(2, -1)$ دو رأس مقابل از مربع ABCD باشند، محیط مربع کدام است؟

- (۱) $8\sqrt{2}$
- (۲) ۸
- (۳) $8\sqrt{3}$
- (۴) ۱۲

۸۰

مقدار مینیمم تابع درجه دوم $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 4x - 1$ کدام است؟

- (۱) -۷
- (۲) -۸
- (۳) -۹
- (۴) -۱۰

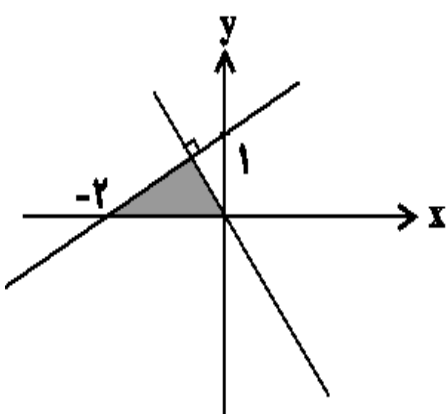
۸۱

اضلاع مثلثی، منطبق بر سه خط به معادلات $y + 2x = 16$ ، $y - x = 2$ و $y = 0$ هستند. اندازه میانه نظیر ضلع افقی این مثلث، در صفحه مختصات کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{5}$
- (۲) ۵
- (۳) $3\sqrt{3}$
- (۴) ۶

۸۲

در شکل مقابل مساحت ناحیه هاشورخورده کدام است؟



- (۱) $0/6$
- (۲) $0/8$
- (۳) ۱
- (۴) $1/2$

۸۳

طول قطر مستطیل محدود بین نمودار توابع $f(x) = |x| - 1$ و $g(x) = 2 - |x - 1|$ برابر کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$
- (۲) $\sqrt{10}$
- (۳) $\sqrt{13}$
- (۴) $\sqrt{5}$

۸۴

فاصله نقطه $A(-1, 2)$ از خط $y - 2x = m$ برابر $\sqrt{5}$ است. مقدار m کدام است؟

(۴) ۱ یا ۵

(۳) ۲ یا ۳

(۲) -۱ یا ۹

(۱) ۵ یا -۱

۸۵

معادله سه ضلع یک مثلث $x + y = 1$ ، $y = 2x$ ، $x = 1$ است. معادله خطی که کوچک‌ترین ارتفاع این مثلث بر آن قرار دارد، کدام است؟

(۴) $y + x = \frac{1}{3}$

(۳) $y + x = \frac{2}{3}$

(۲) $x = \frac{2}{3}$

(۱) $y = \frac{2}{3}$

۸۶

سه نقطه $(-1, 2)$ ، $(1, -2)$ و $(2, -1)$ رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه هستند. فاصله وسط وتر این مثلث تا خط $x + 2y - 4 = 0$ کدام است؟

(۴) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

(۳) $3\sqrt{5}$

(۲) $\sqrt{5}$

(۱) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

۸۷

اگر دو خط $(m+1)x + 2y = 3$ و $2x + 3y = -1$ برهم عمود باشند، عرض محل برخورد آن‌ها کدام است؟

(۴) $\frac{9}{13}$

(۳) $\frac{3}{13}$

(۲) $\frac{1}{4}$

(۱) $\frac{3}{4}$

۸۸

نقاط $A(0, 3)$ ، $B(2, 0)$ و $C(1, 1)$ رأس‌های یک مثلث هستند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

(۴) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

(۳) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$

(۲) $\frac{1}{\sqrt{14}}$

(۱) $\frac{1}{\sqrt{13}}$

۸۹

نقاط B و C و $M(3, 2)$ روی خط $x + 2y = 7$ قرار دارند. مثلث متساوی‌الساقین ABC را چنان می‌سازیم که اندازه میانه AM برابر $5\sqrt{5}$ واحد و BC قاعده مثلث باشد، طول مختصات یک رأس A ، کدام است؟

(۴) -۸

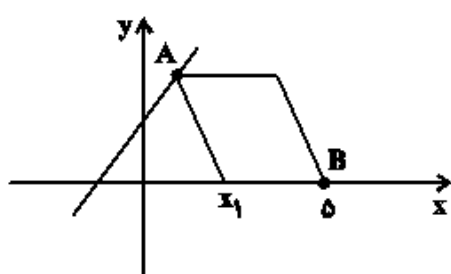
(۳) -۵

(۲) -۲

(۱) ۵

۹۰

در متوازی‌الاضلاع شکل زیر، رأس A روی خط $y = x + 1$ قرار دارد و طول قطر بزرگ آن $AB = 3\sqrt{2}$ واحد است. فاصله نقطه تلاقی قطرهای متوازی‌الاضلاع از مبدأ مختصات کدام است؟



(۱) $\sqrt{29}$

(۲) $\sqrt{\frac{29}{2}}$

(۳) $\sqrt{58}$

(۴) $\frac{\sqrt{58}}{4}$

۹۱

نقطه $(\sqrt{5}, 6 - 7)$ و قرینه‌اش نسبت به نقطه $(6, 9)$ ، دو سر قطر یک مربع‌اند، مساحت این مربع کدام است؟

(۲) ۱۸

(۱) ۳۶

(۴) ۱۴

(۳) ۹

۹۲

دو ضلع مستطیل ABCD روی نمودار تابع $y = |x - 1|$ قرار دارد. اگر مختصات رأس A به صورت $A(2, 2)$ باشد، مساحت این مستطیل کدام است؟

(۲) $\frac{5}{2}$

(۱) $\frac{3}{2}$

(۴) ۱

(۳) ۲

۹۳

به ازای چه مقدار m ، خطوط $3x + (m + 2)y = 3$ و $2x - (m + 3)y + 6 = 0$ منطبق بر قطرهای یک لوزی می‌باشند؟

(۴) -۵

(۳) ۱

(۲) -۴

(۱) -۱

۹۴

اگر $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس A کدام است؟

(۴) $y = x + 3$

(۳) $y = -2x$

(۲) $y = -x + 1$

(۱) $y = -x - 3$

۹۵

خط به معادله $x + y - 1 = 0$ بر دو دایره C_1 و C_2 به ترتیب با مرکزهای $O_1(2, 6)$ و $O_2(-1, 3)$ مماس است. نسبت مساحت دایره بزرگ‌تر به دایره کوچک‌تر کدام است؟

(۱) ۲۵

(۲) ۳۶

(۳) ۳۹

(۴) ۴۹

۹۶

نقطه‌ی $(6, 8)$ رأس یک مستطیل است که دو ضلع آن بر دو خط به معادله‌های $y = 3x$ و $6y + 2x = 40$ واقع هستند. مختصات نقطه‌ی تلاقی قطرهای این مستطیل کدام است؟

(۲) $(2, 7)$

(۱) $(5, 3)$

(۴) $(3, 5)$

(۳) $(4, 7)$

۹۷

ساق‌های دوزنقه متساوی‌الساقینی بر خطوط $(n+2)y - 2x - 3 = 0$ و $y - (n-1)x = 4$ منطبق بوده و قاعده‌های این دوزنقه موازی محور x ‌ها هستند. n چند مقدار طبیعی می‌تواند قبول کند؟

- (۱) هیچ مقدار (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) بی‌شمار

۹۸

مساحت دایره‌ای که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $x - y = 1$ بر آن مماس باشد، کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) 4π

۹۹

۹۱. نقاط $M(-1, -2)$ ، $N(3, 4)$ و $P(-2, -4)$ به ترتیب وسط‌های ضلع‌های AB ، AC و BC از مثلث ABC هستند. معادله خطی که ضلع AC روی آن قرار دارد، کدام است؟

- (۱) $2y - x = 5$ (۲) $y - 2x = -2$ (۳) $2y + x = -5$ (۴) $y + 2x = 5$

۱۰۰

کوتاه‌ترین فاصله نقطه $A(5, 0)$ از نقاط منحنی به معادله $y = \sqrt{2x + 7}$ ، کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) $4/5$ (۳) ۵ (۴) $3\sqrt{2}$

۱۰۱

به ازای چه مقادیری از k ، خط به معادله $3x + 4y = k$ بر دایره‌ای به مرکز $(-2, 1)$ و شعاع ۲ واحد، مماس است؟

- (۱) ۹ و -۱۱ (۲) ۸ و -۱۲ (۳) ۱۲ و -۸ (۴) ۱۱ و -۹

۱۰۲

اگر $A(2, 2)$ ، $B(6, 2)$ و $C(10, 8)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع باشند، کدام نقطه محل تقاطع قطره‌های این متوازی‌الاضلاع نمی‌تواند باشد؟

- (۱) $(4, 2)$ (۲) $(6, 5)$ (۳) $(8, 5)$ (۴) $(6, 4)$

۱۰۳

سه نقطه $A(-1, 2)$ ، $B(-2, 1)$ و $C(2, -1)$ سه رأس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. معادله خط منطبق بر وتر این مثلث محور x ‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) $\frac{1}{2}$

۱۵۴

دایره‌ای از دو نقطه $(۰, ۱)$ و $(۳, ۰)$ گذشته و معادله یک قطر آن به صورت $x - y = ۲$ است. شعاع این دایره کدام است؟

- (۱) $\sqrt{۲}$ (۲) ۲ (۳) $\sqrt{۵}$ (۴) ۳

۱۵۵

اگر $A(۳, ۷)$ و $B(۰, ۳)$ دو سر یک قطر از یک دایره باشند، مساحت این دایره کدام است؟

- (۱) $\frac{۲۵\pi}{۴}$ (۲) ۲۵π (۳) $\frac{۴۹\pi}{۴}$ (۴) ۴۹π

۱۵۶

دایره‌ای به مرکز $(۱, ۲)$ و مماس بر خط به معادله $x + ۲y + ۱ = ۰$ محور x ها را با کدام طول (ها) قطع می‌کند؟

- (۱) ۳ و ۱ (۲) ۴ و ۰ (۳) ۵ و -۱ (۴) ۲

۱۵۷

خطوط موازی و غیرمنطبق $D : ۳x + ۴y = ۷$ و D' بر دایره C به شعاع ۲ مماس‌اند. عرض از مبدأ خط D' کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) $\frac{۳}{۷}$ (۲) $\frac{۷}{۳}$ (۳) $-\frac{۱۳}{۴}$ (۴) $-\frac{۱۳}{۳}$

۱۵۸

نقاط $A(-۵, -۲)$ و $B(۳, ۶)$ دو سر یک پاره‌خط می‌باشند. کدامیک از نقاط زیر از دو سر پاره‌خط AB به فاصله یکسان قرار دارد؟

- (۱) $(۳, ۵)$ (۲) $(-۲, -۱)$ (۳) $(۷, -۵)$ (۴) $(-۳, ۴)$

۱۵۹

نقاط $A(۲, ۱)$ و $B(۰, -۱)$ و $C(۴, -۴)$ رؤوس مثلث ABC هستند. اگر مختصات پای ارتفاع وارد بر ضلع BC به صورت (a, b) باشد، حاصل $۲۵(a + b)$ کدام است؟

- (۱) -۲۳ (۲) -۳۱ (۳) -۱۷ (۴) -۸

۱۱۰

در مثلثی با رأس‌های $A(1, 5)$ ، $B(3, -3)$ و $C(7, 7)$ ، طول میانه AM چقدر است؟

- (۱) ۷ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۴

۱۱۱

نقاط $A(7, 5)$ و $C(3, 9)$ دو رأس مقابل یک مربع هستند. محیط این مربع چقدر است؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۲۰ (۳) ۱۰ (۴) ۲۴

۱۱۲

معادله عمودمنصف پاره خط AB به‌طوری که $A(3, 1)$ و $B(5, -1)$ باشد، محور x ها را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

- (۱) -۲ (۲) ۲ (۳) -۴ (۴) ۴

۱۱۳

محل برخورد نیمساز ناحیه اول و سوم با عمودمنصف پاره‌خط بین دو نقطه $(-2, 3)$ و $(2, 5)$ کدام است؟

- (۱) $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3})$ (۲) $(2, 2)$ (۳) $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ (۴) $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

۱۱۴

معادله خطی که از نقطه $(2, 3)$ می‌گذرد و بر خط $2x + 3y = 1$ عمود است، کدام است؟

- (۱) $y = \frac{3}{2}x$ (۲) $y = \frac{3}{2}x + 6$
(۳) $y = -\frac{3}{2}x + 6$ (۴) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

۱۱۵

شیب نیم‌خطی با نقطه شروع $A(2, 4)$ برابر ۳ است، مستطیل $ABCD$ را چنان می‌سازیم، که نقطه B روی نیم‌خط فوق و رأس سوم آن $C(-3, -1)$ باشد، مختصات یک رأس A ، کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) $6\sqrt{10}$ (۴) $3\sqrt{10}$

۱۱۶

$AB : 3x + y = 2$ ، $AC : 2x + y = -1$ و $BC : x + 2y = 1$ معادلات اضلاع مثلث ABC هستند. معادله خطی که ارتفاع AH بر آن منطبق است از کدام نقطه زیر می‌گذرد؟

- (۱) $(2, 8)$ (۲) $(6, -3)$ (۳) $(5, 3)$ (۴) $(4, -5)$

ساده
درصد پاسخگویی ۶۲٪
قلم‌چی ۱۴۰۰

پاسخ:
سوال ۱
گزینه ۱

گزینه «۱»

نقطه A به طول $x = ۱$ روی نمودار $y = \sqrt{x}$ مختصات $A = (۱, \sqrt{۱}) = (۱, ۱)$ دارد.

نقطه B به طول $x = ۴$ روی نمودار $y = \sqrt{x}$ مختصات $B = (۴, \sqrt{۴}) = (۴, ۲)$ دارد.

بنابراین:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

ساده
درصد پاسخگویی ۶۰٪
قلم‌چی ۱۴۰۰

پاسخ:
سوال ۲
گزینه ۴

گزینه «۴»

چون خط L بر دایره مماس است، پس فاصله آن از مرکز دایره مساوی با شعاع دایره است. این یعنی:

$$R = \frac{|2 \times (3) - 5 \times (-2) - 3|}{\sqrt{4+25}} = \frac{|13|}{\sqrt{29}} = \frac{13}{\sqrt{29}}$$

بنابراین:

$$S = \pi R^2 = \pi \left(\frac{169}{29} \right) = \frac{169}{29} \pi$$

ساده
درصد پاسخگویی ۶۳٪
قلم‌چی ۱۴۰۰

پاسخ:
سوال ۳
گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا نقطه M وسط پاره خط AB را به دست می‌آوریم:

$$M = \left(\frac{\frac{4+2}{2}}{\frac{1+5}{2}} \right) = \left(\frac{3}{3} \right)$$

معادله خط را به صورت استاندارد $3x + 4y - 1 = 0$ می‌نویسیم:

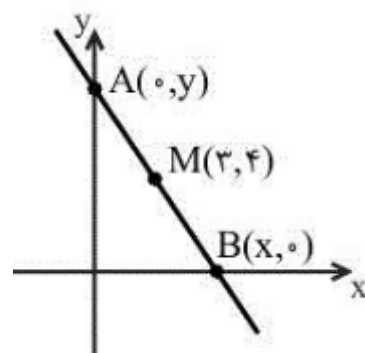
$$d = \frac{|3 \times 3 + 4 \times 3 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{20}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4$$

ساده
درصد پاسخگویی ۴۱٪
قلم‌چی ۱۳۹۹

پاسخ:
سوال ۴
گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر نقطه $A(0, y)$ روی محور yها و نقطه $B(x, 0)$ روی محور xها و نقطه $M(3, 4)$ وسط پاره خط AB باشد، داریم:



$$M \left| \begin{array}{l} 3 = \frac{0+x}{2} \Rightarrow x = 6 \\ 4 = \frac{y+0}{2} \Rightarrow y = 8 \end{array} \right.$$

بنابراین معادله خط گذرا از نقاط $A(0, 8)$ و $B(6, 0)$ برابر است با:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1 \Rightarrow 3y + 4x - 24 = 0$$

ساده
درصد پاسخگویی ۵۲٪
قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: سوال ۵ گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا شیب خط $2x + 4y = 3$ را به دست می آوریم:

$$2x + 4y = 3 \Rightarrow y = \frac{-2x}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow m = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

مقدار m' شیب خط عمود بر خط بالا، قرینه معکوس m است:

$$\Rightarrow m' = 2$$

$$y + 1 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 5$$
 معادله خط عمود

از بین گزینه ها این خط از نقطه $(5, 5)$ می گذرد.

ساده
درصد پاسخگویی ۴۱٪
قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: سوال ۶ گزینه ۱

برای یافتن فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
$$\begin{cases} 4y = 2 - 3x \Rightarrow 4y + 3x - 2 = 0 \\ 1 - y = \frac{3x}{4} \xrightarrow{\times 4} 3x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow d = \frac{|-2 - (-4)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

اندازه قطر مربع برابر است با:

$$\text{اندازه قطر} = \sqrt{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

ساده
درصد پاسخگویی ۵۰٪
قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: سوال ۷ گزینه ۲

با توجه به فرمول فاصله ی نقطه از خط، داریم:

$$d = \frac{|3+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

ساده
درصد پاسخگویی ۴۵٪
قلمچی ۱۳۹۹

پاسخ: سوال ۸ گزینه ۱

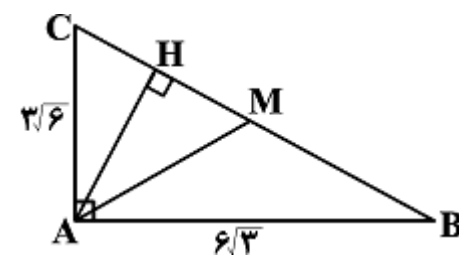
گزینه «۱»

فاصله نقطه B از مبدأ مختصات و همچنین از نقطه $A(x_A, 0)$ برابر است، بنابراین:

$$OB = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$
$$AB = \sqrt{(x_A - (-4))^2 + (0 - 3)^2} = \sqrt{(x_A + 4)^2 + 9}$$
$$\Rightarrow OB = AB$$
$$\Rightarrow 5 = \sqrt{(x_A + 4)^2 + 9} \xrightarrow{\text{توان ۲}} 25 = (x_A + 4)^2 + 9$$
$$\Rightarrow (x_A + 4)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x_A + 4 = 4 \Rightarrow x_A = 0 \\ x_A + 4 = -4 \Rightarrow x_A = -8 \end{cases}$$

گزینه «۳»

ابتدا اندازه وتر را می‌یابیم:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 108 + 54 = 162 = 2 \times 81$$

$$\Rightarrow BC = 9\sqrt{2}$$

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AC^2 = CH \times BC \Rightarrow CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{9 \times 6}{9\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

میانه AM نیز وتر را نصف می‌کند، پس:

$$CM = \frac{BC}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow MH = CM - CH = \frac{9\sqrt{2}}{2} - 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = 1/5\sqrt{2}$$

گزینه «۴»

ابتدا با به‌دست آوردن معادله خط راست و تلاقی آن با سهمی مورد نظر، نقطه‌های A و B را به‌دست می‌آوریم:

نقطه‌های (۰, -۱) و (۱, ۰) روی خط مورد نظر قرار دارند، بنابراین:

$$m = \frac{0 - (-1)}{1 - 0} = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 1) \rightarrow y = x - 1$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -x^2 + 2x + 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow -x^2 + 2x + 1 = x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1, & y = -2 \\ x = 2, & y = 1 \end{cases}$$

مختصات نقطه M برابر است با:

$$\begin{matrix} A(-1, -2) \\ B(2, 1) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \\ y_M = \frac{-2+1}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$$

نقطه رأس سهمی برابر است با:

$$y = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-2}{2(-1)} = 1 \\ y_S = -1 + 2 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow S(1, 2)$$

فاصله رأس سهمی از نقطه M برابر است با:

$$MS = \sqrt{(1 - \frac{1}{2})^2 + (2 - (-\frac{1}{2}))^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{26}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26}$$

گزینه «۱»

ابتدا نقطه M وسط پاره خط BC را به دست می آوریم، سپس معادله خط گذرنده از A و M را می نویسیم:

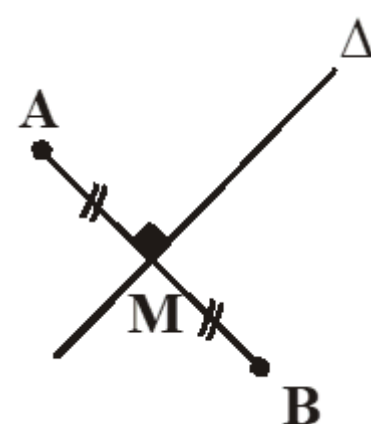
$$M = \left[\begin{array}{c} \frac{5+1}{2} \\ \frac{1-1}{2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 3 \\ 0 \end{array} \right]$$

$$m_{AM} = \frac{0-3}{3-2} = -3$$

$$y - 0 = -3(x - 3) \Rightarrow y = -3x + 9$$

گزینه «۴»

عمود منصف پاره خط AB، خطی است که از نقطه وسط آن (M) گذشته و بر آن عمود است.



$$A(2, 4) \text{ و } B(-4, 2)$$

$$\Rightarrow M \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

$$\Rightarrow M = \left(\frac{2-4}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = (-1, 3)$$

$$m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4-2}{2+4} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m_{\Delta} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} = -3$$

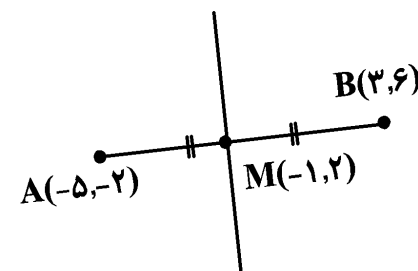
$$\Delta : y - y_M = m_{\Delta} (x - x_M)$$

$$\Rightarrow \Delta : y - 3 = -3(x + 1) \Rightarrow \Delta : y + 3x = 0$$

$$\xrightarrow{y=0} 0 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

گزینه «۳»

تمامی نقاطی که روی عمودمنصف یک پاره‌خط قرار دارند، از دو سر پاره‌خط به یک فاصله‌اند پس معادله عمودمنصف را به‌دست می‌آوریم:



$$M\left(\frac{-5+3}{2}, \frac{-2+6}{2}\right) = M(-1, 2)$$

$$m_{AB} = \frac{6-(-2)}{3-(-5)} = \frac{8}{8} = 1$$

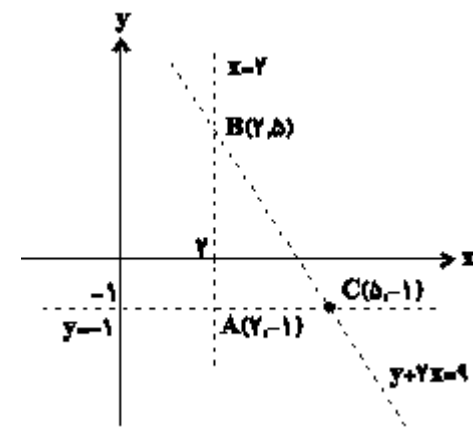
$$m' = -1 \xrightarrow{(-1, 2)} \text{معادله خط عمودمنصف} \Rightarrow m' = -1 \text{ قرینه و معکوس برای شیب عمودمنصف}$$

$$y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x - 1 + 2 \\ \Rightarrow y = -x + 1$$

تنها گزینه «۳» یعنی نقطه $(\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ در معادله این خط صدق می‌کند.

گزینه «۱»

مثلث قائم‌الزاویه است و بلندترین ضلع آن BC است.



پس معادله AM را می‌خواهیم.

$$M\left(\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2}\right) = M(3/5, 2)$$

$$m_{AM} = \frac{3}{+1/5} = 2 \Rightarrow \text{معادله AM: } y - (-1) = 2(x - 2)$$

$$y = 2x - 5$$

پاسخ: سوال ۱۵ گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۲۶% متوسط

گزینه «۲»

مثلت در رأس A قائمه می‌باشد، پس شیب AB و AC، قرینه و معکوس همدیگر هستند.

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2k-6}{4} = \frac{k-3}{2} \\ m_{AC} = \frac{4}{2-k} \end{cases} \Rightarrow \frac{k-3}{2} = \frac{k-2}{4} \Rightarrow k = 4$$

پای میانه وارد بر وتر همان وسط پاره‌خط BC است.

$$\Rightarrow \begin{cases} B(6, 5) \\ C(4, -1) \end{cases} \Rightarrow \text{وسط پاره‌خط BC} (5, 2)$$

$$\sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} \quad \text{و در نهایت فاصله این نقطه تا مبدأ برابر است با:}$$

پاسخ: سوال ۱۶ گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۷۰% ساده

گزینه «۳»

ابتدا نقطه M وسط پاره خط AB را به دست می‌آوریم.

$$M = \begin{bmatrix} \frac{3+5}{2} \\ \frac{3+1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{فاصله M از خط داده شده} = \frac{|3 \times 4 - 4 \times 2 + 2|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5}$$

پاسخ: سوال ۱۷ گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۹% دشوار

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} : \text{ محل برخورد خط d با محور xها}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} : \text{ محل برخورد خط d با محور yها}$$

$$\Rightarrow \text{شیب: } a = \frac{-1-0}{0-2} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + b$$

با توجه به اینکه نقطه $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ روی خط است، مشخص می‌شود که:

$$b = -1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1$$

معادله خطی که از مبدأ مختصات و نقطه $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ می‌گذرد برابر است با: $y = 3x$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1 \\ y = 3x \end{cases} \Rightarrow 3x = \frac{1}{2}x - 1 \Rightarrow \frac{5}{2}x = -1$$

$$\Rightarrow x = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = \frac{-6}{5} \Rightarrow \text{نقطه برخورد: } \begin{bmatrix} \frac{-2}{5} \\ \frac{-6}{5} \end{bmatrix}$$

گزینه «۲»

ابتدا مختصات نقطه M وسط پاره خط BC را می یابیم:

$$M = \left[\begin{array}{c} \frac{۵+۱}{۲} \\ \frac{۱+۳}{۲} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} ۳ \\ ۲ \end{array} \right]$$

اگر A' قرینه A نسبت به M باشد، M وسط پاره خط AA' قرار دارد، بنابراین:

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_{A'}}{۲} \Rightarrow ۳ = \frac{۳ + x_{A'}}{۲} \Rightarrow x_{A'} = ۳ \\ y_M &= \frac{y_A + y_{A'}}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{-۲ + y_{A'}}{۲} \Rightarrow y_{A'} = ۶ \\ &\Rightarrow A'(۳, ۶) \end{aligned}$$

گزینه «۳»

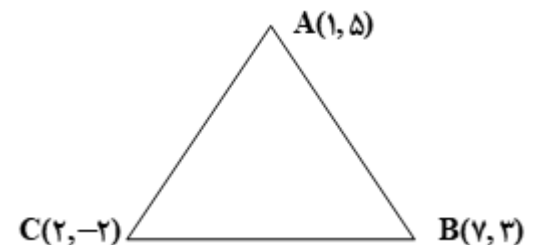
نقطه تقاطع $y = ax$ با خطوط $y = ۲$ و $y = ۶$ به ترتیب $(۲, \frac{۲}{a})$ و $(\frac{۶}{a}, ۶)$ می باشد. پس داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{۶}{a} - \frac{۲}{a}\right)^2 + (۶ - ۲)^2} &< ۵ \xrightarrow{\text{توان } ۲} \frac{۱۶}{a^2} + ۱۶ < ۲۵ \\ \Rightarrow \frac{۱۶}{۹} < a^2 &\Rightarrow a > \frac{۴}{۳} \text{ یا } a < -\frac{۴}{۳} \end{aligned}$$

گزینه «۴»

با توجه به شکل فرضی زیر، برای به دست آوردن اندازه ارتفاع AH، باید فاصله نقطه A را از خط BC به دست آوریم.

معادله خط BC برابر است با:



$$y - ۳ = \frac{۳ - (-۲)}{۷ - ۲}(x - ۷)$$

$$\Rightarrow y - ۳ = \frac{۵}{۵}(x - ۷) \Rightarrow y = x - ۴$$

حال با اندازه ارتفاع AH را محاسبه می کنیم:

$$y - x + ۴ = ۰$$

$$AH = \frac{|۵ - ۱ + ۴|}{\sqrt{۱^2 + (-۱)^2}} = \frac{۸}{\sqrt{۲}} = ۴\sqrt{۲}$$

گزینه «۳»

با توجه به شکل سؤال، در خط Δ ، طول از مبدأ ۱- و عرض از مبدأ ۲ است، معادله آن را می نویسیم:

$$\frac{x}{-۱} + \frac{y}{۲} = ۱ \Rightarrow ۲x - y = -۲ \Rightarrow \Delta: ۲x - y + ۲ = ۰$$

فاصله مبدأ از خط Δ برابر است با:

$$d = \frac{|۲|}{\sqrt{۲^2 + (-۱)^2}} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$$

گزینه «۲»

فاصله نقطه $A(\sqrt{6}, 0)$ از خط $y + x = 0$ برابر است با:

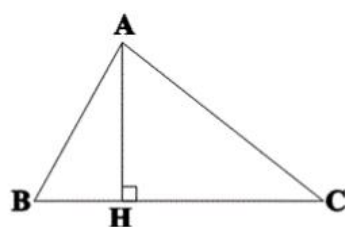
$$h = \frac{|1 \times 0 + 1 \times \sqrt{6} + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

بنابراین طول ارتفاع AH در مثلث ABC برابر $\sqrt{3}$ است. اکنون توجه کنید که در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a و طول ارتفاع h، $h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ و $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ است. بنابراین چون $h = \sqrt{3}$ پس:

$$\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2^2 = \sqrt{3}$$

گزینه «۲»

یک شکل فرضی از مسأله رسم می‌کنیم، طول ارتفاع AH برابر فاصله نقطه A از خط گذرنده از دو نقطه B و C است.



$$BC : y - y_B = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} (x - x_B)$$

$$\Rightarrow BC : y - 0 = \frac{0 - (-2)}{3 - 1} (x - 3)$$

$$\Rightarrow BC : y = x - 3 \Rightarrow BC : y - x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow AH = \frac{|y_A - x_A + 3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{|2 + 1 + 3|}{\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

گزینه «۲»

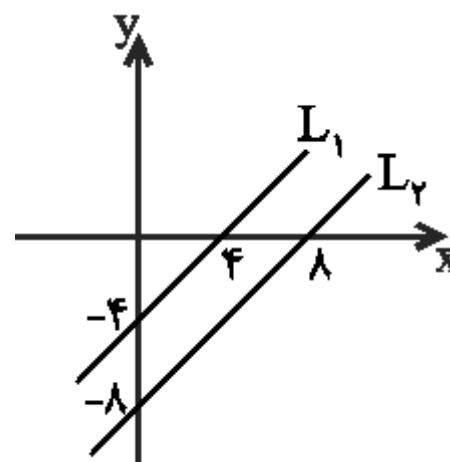
دو خط L_1 و L_2 موازی‌اند، زیرا:

$$\text{شیب هر دو خط} = -\frac{x}{y} \frac{\text{شیب}}{\text{شیب}} = -\frac{-1}{1} = 1$$

فاصله این دو خط موازی برابر است با:

$$2\sqrt{2} = \frac{|2a-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} \Rightarrow |a| = 4 \Rightarrow a = \pm 4$$

اگر $a = 4$ باشد:

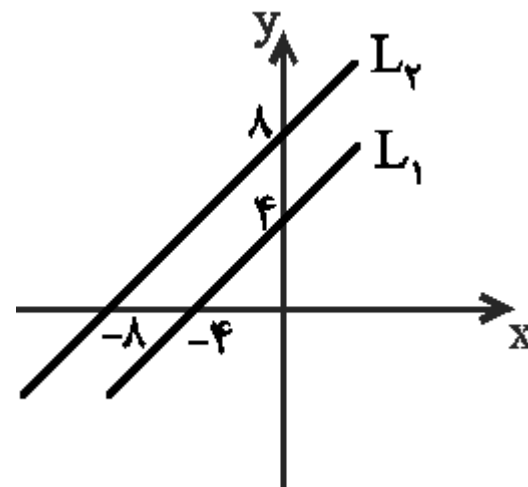


$$L_1 : y - x + 4 = 0 \Rightarrow y = x - 4$$

$$L_2 : y - x + 8 = 0 \Rightarrow y = x - 8$$

که هر دو از ناحیه چهارم عبور می‌کنند.

اگر $a = -4$ باشد:



$$L_1 : y - x - 4 = 0 \Rightarrow y = x + 4$$

$$L_2 : y - x - 8 = 0 \Rightarrow y = x + 8$$

گزینه «۳»

دو خط موازی‌اند. فاصله بین دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از فرمول $d = \frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ به‌دست می‌آید.

ابتدا دو معادله را به شکل گسترده می‌نویسیم:

$$y = \sqrt{3}x + 2 \Rightarrow y - x\sqrt{3} - 2 = 0$$

$$\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \xrightarrow{\div \sqrt{3}} y - x\sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\Rightarrow y - x\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow d = \frac{|2\sqrt{3}+2|}{\sqrt{1+3}} = \frac{2\sqrt{3}+2}{2} = \sqrt{3}+1$$

از آنجایی که ABCD مربع است، شیب خط d با شیب پاره‌خط AB برابر است (AB با خط d موازی است): $m_d = \frac{0-1}{-1-0} = 1$ پس معادله خط d به صورت $y = x + b$ می‌باشد.

از طرفی در مربع، اضلاع با هم برابرند: $|AB| = |AD|$ که |AD| برابر با فاصله نقطه A از خط d می‌باشد:

$$|AD| = |AB| \rightarrow \frac{|1-b|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow |1-b| = 2 \Rightarrow \begin{cases} 1-b=2 \Rightarrow b=-1 \\ 1-b=-2 \Rightarrow b=3 \end{cases}$$

با توجه به شکل داده شده، عرض از مبدأ مثبت است. بنابراین $b = 3$ مورد قبول می‌باشد. نقطه $(-2, 1)$ روی خط $y = x + 3$ قرار دارد.

گزینه «۳»

دو نقطه A و B هم طول هستند. بنابراین: $AB = |4-1| = 3$

دو نقطه A و C هم‌عرض هستند. بنابراین: $AC = |-2-2| = 4$

$$BC = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2}$$

$$BC = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (1 - 4)^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\triangle ABC \text{ محیط} = 3 + 4 + 5 = 12$$

گزینه «۲»

قطرهای مربع بر هم عمودند، پس شیب قطرهای قرینه معکوس هم هستند.

$$\begin{cases} y = (k+2)x + 3 \Rightarrow m = k+2 \\ ky - x - 5 = 0 \Rightarrow m' = \frac{1}{k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (m'm = -1 \text{ شرط عمود بودن}) \Rightarrow \frac{k+2}{k} = -1$$

$$\Rightarrow k+2 = -k \Rightarrow k = -1$$

حال با معلوم بودن K ، معادلات دو خط را نوشته و آن‌ها را با هم تلاقی می‌دهیم.

$$k = -1 \Rightarrow \begin{cases} y = x + 3 \\ -y - x - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -4, y = -1$$

$$A \left| \begin{matrix} -4 \\ -1 \end{matrix} \right|_0, 0 \Rightarrow AO = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17}$$

گزینه «۳»

معادله نیمساز ناحیه دوم یا چهارم، $y = -x$ است که مختصات هر نقطه روی آن به صورت $(\alpha, -\alpha)$ است. چون فاصله آن از نقطه $(-1, 2)$ برابر ۲ است، داریم:

$$AB = 2 \Rightarrow \sqrt{(\alpha+1)^2 + (-\alpha-2)^2} = 2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha + 1 + \alpha^2 + 4\alpha + 4 = 4 \Rightarrow 2\alpha^2 + 6\alpha + 1 = 0$$

جواب‌های معادله درجه دوم، طول نقاط مورد نظر است، پس:

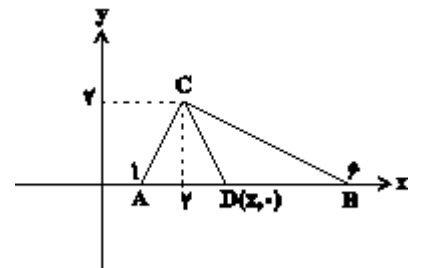
$$-3 = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{2} = \text{جمع ریشه‌ها} = \text{جمع طول نقاط مورد نظر}$$

گزینه «۴»

فاصله نقطه $O(-1, 1)$ تا خط $2x + y - 4 = 0$ برابر شعاع دایره است، بنابراین:

$$R = \frac{|2 \times (-1) + (1) - 4|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

گام اول: شکل را رسم می‌کنیم:



گام دوم: معادله خطوط AC و BC را می‌یابیم. فاصله D از هر دو خط برابر است.

$$A(1, 0), C(2, 2) \Rightarrow AC : y - 0 = \frac{2 - 0}{2 - 1}(x - 1) \\ \Rightarrow y = 2x - 2$$

$$C(2, 2), B(6, 0) \Rightarrow BC : y - 0 = \frac{0 - 2}{6 - 2}(x - 6) \\ \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

گام سوم: فاصله $D(x, 0)$ از هر دو خط:

$$\begin{cases} y - 2x + 2 = 0 \\ y + \frac{1}{2}x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{|-2x+2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|\frac{1}{2}x-3|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}$$

$$\frac{|-2x+2|}{\sqrt{5}} = \frac{|x-6|}{\sqrt{5}} = \begin{cases} -2x+2 = x-6 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \\ -2x+2 = 6-x \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

با توجه به شکل $x = \frac{8}{3}$ صحیح است.

گزینه «۲»

فرض کنیم A' قرینه A نسبت به M باشد. در نتیجه:

$$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_M \Rightarrow \frac{2 + x_{A'}}{2} = -2 \Rightarrow x_{A'} = -6 \\ \frac{y_A + y_{A'}}{2} = y_M \Rightarrow \frac{5 + y_{A'}}{2} = 1 \Rightarrow y_{A'} = -3$$

$$OA' = \sqrt{(-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

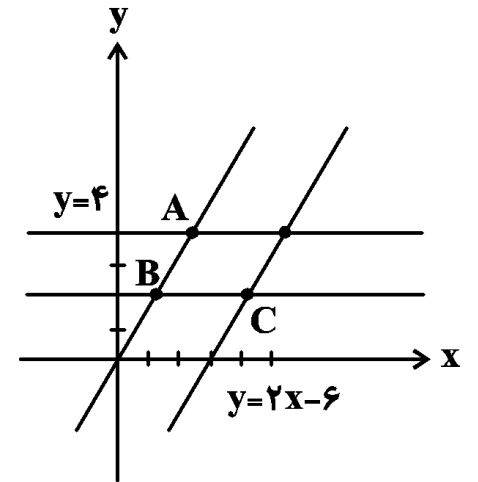
گزینه «۳»

$$\begin{cases} y - ۴ = ۰ \rightarrow y = ۴ \\ x = \frac{y}{۲} + ۳ \rightarrow y = ۲x - ۶ \end{cases}$$

مطابق شکل زیر معادله یک ضلع دیگر متوازی‌الاضلاع باید خط $y = ۲$ باشد. در این صورت مختصات نقطه C برابر است با:

$$y = ۲ \rightarrow ۲ = ۲x - ۶ \rightarrow x = ۴ \rightarrow C(۴, ۲)$$

$$\text{محل برخورد قطرها} = \text{وسط AC} = \left(\frac{۴+۲}{۲}, \frac{۲+۴}{۲} \right) = (۳, ۳)$$



گزینه «۴»

$$x = \sqrt{y+۳} - \sqrt{y-۳} \rightarrow x^۲ = (y+۳) + (y-۳) - ۲\sqrt{(y+۳)(y-۳)}$$

$$\rightarrow x^۲ = ۲y - ۲\sqrt{y^۲ - ۹}$$

با برابر قرار دادن ضابطه‌های دو منحنی محل تلاقی را به دست می آوریم:

$$۲y = ۲y - ۲\sqrt{y^۲ - ۹} \rightarrow ۲\sqrt{y^۲ - ۹} = ۰ \rightarrow y^۲ - ۹ = ۰$$

$$\rightarrow \begin{cases} y = ۳ \text{ ق ق} \\ y = -۳ \text{ ق غ} \end{cases}$$

بنابراین مختصات نقطه تلاقی $(\sqrt{۶}, ۳)$ است، فاصله این نقطه تا مبدأ مختصات برابر است با:

$$\sqrt{(\sqrt{۶})^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۱۵}$$

پاسخ:

سوال ۳۵

گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۱٪

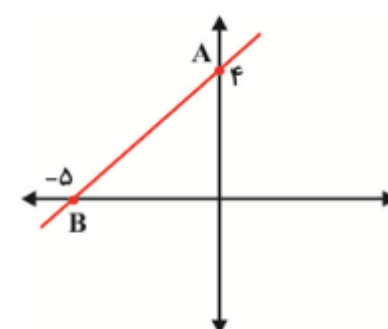
دشوار

$$4x - 5y = -20$$

x	0	-5
y	4	0
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ A	$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix}$ B

قاعده × ارتفاع × $\frac{1}{2}$ = مساحت مثلث

$$\text{مساحت مثلث} = \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$$



پاسخ:

سوال ۳۶

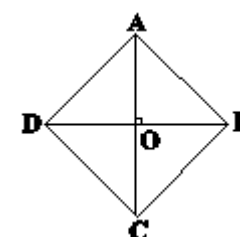
گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۱٪

متوسط

برای نوشتن معادله قطر AC به یک نقطه و شیب آن نیاز داریم. مختصات نقطه O که وسط پاره خط BD است و شیب آن که به علت عمود بودن بر BD، قرینه معکوس شیب BD است:



$$m_{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 0}{0 - 3} = -\frac{4}{3}$$

$$m_{AC} = -\frac{1}{m_{BD}} = \frac{3}{4}$$

$$O \text{ مختصات } \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 4 \right)$$

$$\text{معادله قطر AC} \therefore y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow y - 4 = \frac{3}{4}x - \frac{9}{8}$$

$$\xrightarrow{x=0} y - 4 = 0 - \frac{9}{8} \Rightarrow y = \frac{23}{8} = 2\frac{7}{8}$$

پاسخ: سوال ۳۷ گزینه ۴

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۵۸% ساده

گزینه «۴»

معادله خطی که از دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد عبارت است از:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$A(-2, 3), B(7, -3) \Rightarrow y - 3 = \frac{-3 - 3}{7 + 2}(x + 2)$$

$$\Rightarrow y - 3 = \frac{-6}{9}(x + 2) \Rightarrow y - 3 = \frac{-2}{3}(x + 2)$$

$$\Rightarrow 3(y - 3) = -2(x + 2) \Rightarrow 3y - 9 = -2x - 4$$

$$\Rightarrow 2x + 3y = 5$$

برای یافتن محل تلاقی خط با محورهای x و y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{y=0} 2x + 3(0) = 5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5$$

پاسخ: سوال ۳۸ گزینه ۴

گزینه های دام دار ۳ قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۲۴% متوسط

گزینه «۴»

دو خط داده شده یا بر دو ضلع مقابل مربع منطبق‌اند یا بر دو ضلع مجاور مربع.

حالت (۱): اگر بر دو ضلع مقابل منطبق باشند؛ پس شیب آنها باید یکسان باشد:

$$ay - x = -7 \rightarrow m_1 = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{-1}{a} = \frac{1}{a}$$

$$a^3x + y = 2 \rightarrow m_2 = -\frac{\text{ضریب } x}{\text{ضریب } y} = -\frac{a^3}{1} = -a^3$$

$$m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{1}{a} = -a^3 \Rightarrow a^4 = -1$$

مقداری برای a وجود ندارد.

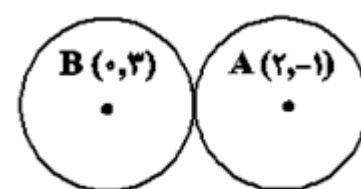
حالت (۲): اگر بر دو ضلع مجاور منطبق باشند، پس باید بر هم عمود باشند:

$$m_1 m_2 = -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{a}\right)(-a^3) = -1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

همچنین اگر $a = 0$ باشد، معادله خط‌ها به صورت $x = 7$ و $y = 2$ خواهند بود که بر هم عمودند. بنابراین a می‌تواند سه مقدار $1, -1$ و صفر داشته باشد.

پاسخ: سوال ۳۹ گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۴۳% ساده



با توجه به شکل، کافی است فاصله دو مرکز دایره را حساب کنیم و آن را نصف کنیم:

$$AB = \sqrt{(0 - 2)^2 + (3 + 1)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \text{شعاع هر دایره} = \frac{2\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

گزینهٔ «۳»

فاصله مرکز دایره از خط مماس بر دایره، شعاع دایره می‌باشد. از طرفی چون مساحت دایره به شعاع ۲ برابر πr^2 می‌باشد، پس:

$$\pi r^2 = \frac{9\pi}{25} \Rightarrow r^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow r = \frac{3}{5}$$

$$\text{فاصله مرکز تا خط مماس بر دایره} : \frac{|4a+3(2)-5|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{|4a+1|}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow |4a+1| = 3$$

$$\Rightarrow 4a+1=3 \Rightarrow a=\frac{1}{2}, \quad 4a+1=-3 \Rightarrow a=-1$$

پس مقدار صحیح a برابر -۱ می‌باشد.

گزینهٔ «۳»

$$\left. \begin{matrix} A(1, 0) \\ B(4, 2) \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$\left. \begin{matrix} A(1, 0) \\ C(3, -3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow AC = \sqrt{(3-1)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\left. \begin{matrix} B(4, 2) \\ C(3, -3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC = \sqrt{(3-4)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

متساوی‌الساقین است. $AB = AC = \sqrt{13} \Rightarrow$

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 : \text{بررسی شرط قائم‌الزاویه}$$

$$\Rightarrow (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = (\sqrt{26})^2. \text{ در رأس A قائم‌الزاویه است.}$$

گزینهٔ «۳»

توجه کنید نقطه A روی قطر داده شده قرار ندارد.

اگر طول ضلع مربع را a فرض کنیم فاصله نقطه A تا قطر برابر $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ خواهد بود. نقطه B را با مختصات مجهول روی قطر مورد نظر فرض می‌کنیم $(\alpha, 2\alpha - 2)$ که فاصله آن تا نقطه A برابر a خواهد بود.

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{|1+2-2(-1)|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}} \Rightarrow a = \sqrt{10}$$

$$|AB| = a = \sqrt{(\alpha+1)^2 + (2\alpha-3)^2} = \sqrt{10}$$

$$5\alpha^2 - 10\alpha + 10 = 10 \Rightarrow 5\alpha(\alpha-2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0, 2 \Rightarrow B(0, -2) \text{ یا } B(2, 2)$$

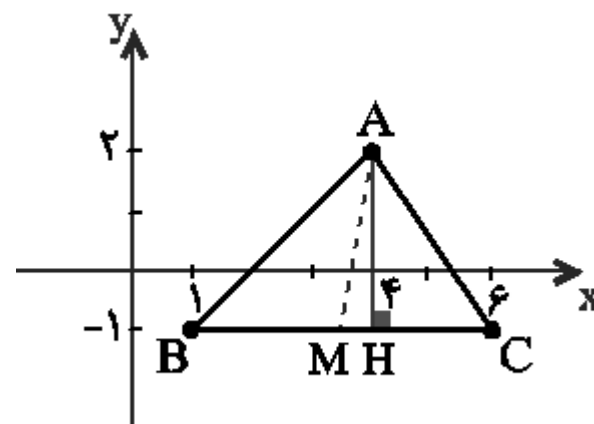
پاسخ: سوال ۴۳ گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۲۲%

متوسط

گزینه «۴»



با توجه به شکل، از آنجا که نقاط B و C هم‌عرض هستند و روی یک خط افقی قرار دارند، مختصات پای ارتفاع H به‌صورت $H(4, -1)$ است. از طرفی M وسط پاره‌خط BC است، بنابراین:

$$M \left| \begin{array}{l} \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{-1 + 6}{2} = \frac{5}{2} \\ \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-1 + (-1)}{2} = -1 \end{array} \right.$$

فاصله دو نقطه هم‌عرض $H(4, -1)$ و $M(\frac{5}{2}, -1)$ برابر است با:

$$MH = |x_H - x_M| = |4 - \frac{5}{2}| = \frac{1}{2}$$

پاسخ: سوال ۴۴ گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۳۴%

متوسط

گزینه «۱»

مختصات نقطه A روی خط $y = -x$ به‌صورت $(\alpha, -\alpha)$ است و می‌دانیم فاصله نقطه (x_1, y_1) از خط $ax + by + c = 0$ برابر $\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است:

$$A \left| \begin{array}{l} \alpha \\ -\alpha \end{array} \right. , y - 2x + 1 = 0 \Rightarrow d = \frac{|-\alpha - 2\alpha + 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-3\alpha + 1|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |-3\alpha + 1| = 5 \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha + 1 = 5 \Rightarrow \alpha = -\frac{4}{3} & \text{ناحیه دوم} \\ -3\alpha + 1 = -5 \Rightarrow \alpha = 2 & \text{ناحیه چهارم} \end{cases}$$

$$A(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}), O(0, 0)$$

$$\Rightarrow OA = \sqrt{(-\frac{4}{3} - 0)^2 + (\frac{4}{3} - 0)^2} = \sqrt{2 \times \frac{16}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

پاسخ: سوال ۴۵ گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۴۲%

ساده

گزینه «۳»

نقطه M وسط پاره‌خط BC قرار دارد. با توجه به نقطه‌های $B(2, -1)$ و $C(-6, 3)$ داریم:

$$M(\frac{-6+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}) = M(-2, 1)$$

شیب خط میانه AM را به کمک دو نقطه A و M به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} A(1, 5) \\ M(-2, 1) \end{cases} \Rightarrow m_{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 1}{1 - (-2)} = \frac{4}{3}$$

معادله خط AM :

$$y - 5 = \frac{4}{3}(x - 1) \xrightarrow[\text{محل برخورد با محور } y]{x=0} y - 5 = -\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{11}{3}$$

گزینه «۲»

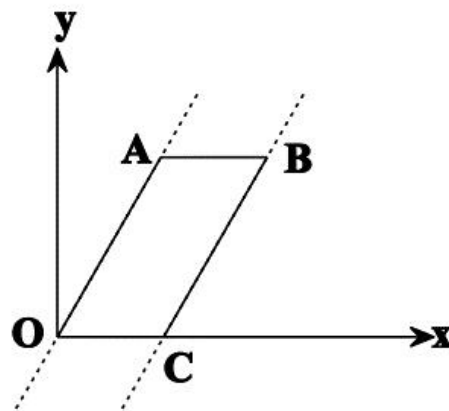
چون اضلاع متوازی الاضلاع دوجه دو موازی اند، کافی است از نقطه B خطی را به موازات نیمساز ربع اول رسم کنیم تا محور x ها را در نقطه C قطع کند:

معادله نیمساز ربع اول $y = x \Rightarrow m = 1$

خط گذرنده از رأس B و موازی $y = x$ را به دست می آوریم:

$$y - 2 = 1(x - 3) \Rightarrow y = x - 1 \xrightarrow{y=0} x = 1 \Rightarrow C(1, 0)$$

دقت کنید که عرض رأس C، برابر صفر است.



گزینه «۳»

دو خط داده شده موازی اند. بنابراین کافی است فاصله یک نقطه دلخواه از یک خط را تا خط دیگر محاسبه کنیم:

$$\begin{aligned} y &= -2x + 1 \xrightarrow{x=0} y = 1 \Rightarrow (0, 1) \\ 4x + 2y &= 5 \Rightarrow 4x + 2y - 5 = 0 \\ d &= \frac{|4 \times 0 + 2 \times 1 - 5|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{20}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10} \end{aligned}$$

گزینه «۳»

ابتدا معادله خطی که از دو نقطه $A(m, -1)$ و $B(1, 1 - 2m)$ می گذرد را می نویسیم:

$$\begin{aligned} \text{معادله خط: } y - y_A &= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} (x - x_A) \\ \Rightarrow y - (-1) &= \frac{(1-2m) - (-1)}{1-m} (x - m) \\ \Rightarrow y + 1 &= \frac{2-2m}{1-m} (x - m) \Rightarrow y + 1 = \frac{2(1-m)}{1-m} (x - m) \\ \xrightarrow{m \neq 1} y + 1 &= 2x - 2m \Rightarrow y = 2x - 2m - 1 \end{aligned}$$

چون خط، محور y ها را در نقطه ای به عرض ۳ قطع می کند، بنابراین:

$$(0, 3) \in \text{خط} \Rightarrow 3 = 0 - 2m - 1 \Rightarrow m = -2$$

پس معادله خط به صورت $y = 2x + 4 - 1 = 2x + 3$ است.

حال برای یافتن نقطه تقاطع خط با محور x ها، $y = 0$ را در معادله خط قرار می دهیم:

$$0 = 2x + 3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

گزینه «۴»

در لوزی، همواره قطرها بر هم عمودند، پس شیب دو خط باید قرینه معکوس یکدیگر باشند.

$$\begin{aligned} 3x + (m + 2)y = 3 &\xrightarrow{\text{شیب خط}} m_1 = \frac{-3}{m+2} \\ &\xrightarrow{\text{قرینه معکوس}} \frac{m+2}{3} \\ 2x - (m + 3)y + 6 = 0 &\xrightarrow{\text{شیب خط}} m_2 = \frac{-2}{-(m+3)} \\ &= \frac{2}{m+3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{m+2}{3} = \frac{2}{m+3} \Rightarrow m^2 + 5m + 6 = 6$$

$$\Rightarrow m^2 + 5m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ ق} \\ m = -5 \text{ ق} \end{cases}$$

تنها $m = -5$ در گزینه «۴» موجود است.

گزینه «۴»

$$\begin{aligned} 3y = 4x - 1 &\Rightarrow -4x + 3y + 1 = 0 \\ d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= \frac{|-4 \times (-2) + 3 \times 1 + 1|}{\sqrt{(-4)^2 + 3^2}} \\ &= \frac{|8 + 3 + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{12}{5} = 2.4 \end{aligned}$$

گزینه «۲»

قرینه نقطه $A(3, -a)$ نسبت به نقطه $B(a, 2)$ برابر $(2a - 3, 2 \times 2 + a)$ است، پس:

$$(2a - 3, 4 + a) \in (y = x + 5) \Rightarrow 4 + a = 2a - 3 + 5$$

$$\Rightarrow a = 2 \Rightarrow A(3, -2), B(2, 2) \Rightarrow |AB| = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

گزینه «۲»

ابتدا اندازه ضلع‌های مثلث را به کمک فاصله دو نقطه از هم، به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{(-3 + 3)^2 + (-1 - 7)^2} = \sqrt{0 + 64} = 8 \\ AC &= \sqrt{(-3 - 3)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \\ BC &= \sqrt{(-3 - 3)^2 + (7 - 3)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} \end{aligned} \right\}$$

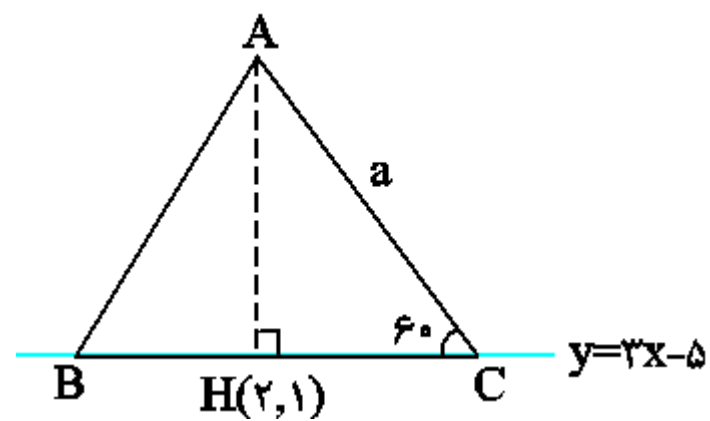
پس مثلث متساوی‌الساقین است.

چون قضیه فیثاغورس در مثلث صادق نیست، پس مثلث قائم‌الزاویه نیست.

$$(8)^2 \neq (\sqrt{52})^2 + (\sqrt{52})^2$$

گزینه «۲»

با توجه به شکل زیر داریم:



طول ضلع مثلث متساوی الاضلاع ABC برابر است با:

$$3a = \sqrt{270} = 3\sqrt{30} \Rightarrow a = \sqrt{30}$$

اندازه ارتفاع AH برابر است با:

$$\sin 60^\circ = \frac{AH}{\sqrt{30}} \Rightarrow AH = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{30}) = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

$$\begin{matrix} A(\alpha, \beta) \\ H(2, 1) \end{matrix} \rightarrow AH = \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (\beta - 1)^2} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} (\alpha - 2)^2 + (\beta - 1)^2 = \frac{90}{4}$$

با تشکیل معادله ارتفاع AH داریم:

$$m_{AH} = -\frac{1}{3}, \quad H(2, 1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \xrightarrow{\times(-3)} -3y + 3 = x - 2 \Rightarrow x = 5 - 3y$$

اگر عرض نقطه A را α فرض کنیم، مختصات آن به صورت $A(5 - 3\alpha, \alpha)$ می شود. حال فاصله نقطه A از خط $3x - y - 5 = 0$ را به دست می آوریم:

$$\frac{|15 - 9\alpha - \alpha - 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{90}}{2} \Rightarrow |-10\alpha + 10| = 15$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow A\left(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\ \alpha_2 = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) \end{cases}$$

روش دوم: با جایگذاری مختصات نقاطه گزینه دوم، $\left(\frac{13}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ در معادله (*) داریم:

$$\left(\frac{13}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2 = \frac{11}{4} + \frac{9}{4} = \frac{90}{4}$$

بنابراین گزینه دوم صحیح است.

گزینه «۱»

$$2y + 3x = 1 \Rightarrow 2y + 3x - 1 = 0$$

a = طول ضلع مربع = فاصله A از خط داده شده

$$\Rightarrow a = \frac{|2 \times 1 + 3 \times 3 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{10}{\sqrt{13}} = \frac{10\sqrt{13}}{13}$$

$$\text{محیط مربع} = 4a = \frac{40\sqrt{13}}{13}$$

فرض می‌کنیم خط $۴x - ۲y + ۸ = ۰$ محور x ها را در نقطه A و محور y ها را در نقطه B قطع کند، بنابراین مختصات نقاط A و B عبارت است از:

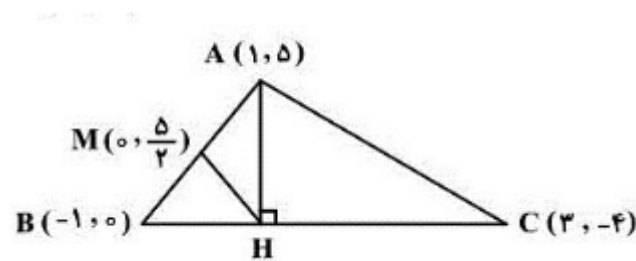
$$\begin{cases} x = ۰ \Rightarrow -۲y + ۸ = ۰ \Rightarrow y = ۴ \Rightarrow B(۰, ۴) \\ y = ۰ \Rightarrow ۴x + ۸ = ۰ \Rightarrow x = -۲ \Rightarrow A(-۲, ۰) \end{cases}$$

$$AB \text{ پاره خط} = M\left(\frac{x_A + x_B}{۲}, \frac{y_A + y_B}{۲}\right)$$

$$= \left(\frac{-۲ + ۰}{۲}, \frac{۰ + ۴}{۲}\right) \Rightarrow M(-۱, ۲) = M(a, b)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -۱ \\ b = ۲ \end{cases} \Rightarrow a + b = -۱ + ۲ = ۱$$

گزینه «۱»



$$BC \text{ شیب ضلع} : m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-۴}{۳+۱} = -۱$$

$$BC \text{ معادله} : y = -x + h \xrightarrow{B(-۱, ۰)} ۰ = ۱ + h \Rightarrow h = -۱$$

$$\Rightarrow BC : y = -x - ۱$$

$$AH \text{ ارتفاع معادله} : y = \frac{-۱}{m_{BC}}x + h' = x + h'$$

$$\xrightarrow{A(۱, ۵)} ۵ = ۱ + h' \Rightarrow h' = ۴ \Rightarrow y = x + ۴$$

$$\xrightarrow{BC \text{ و } AH \text{ تلاقی}} H \text{ نقطه} : \left(-\frac{۵}{۲}, \frac{۳}{۲}\right)$$

$$AB \text{ ضلع} : M\left(\frac{۱-۱}{۲}, \frac{۵+۰}{۲}\right) = \left(۰, \frac{۵}{۲}\right)$$

$$\Rightarrow MH = \sqrt{\left(-\frac{۵}{۲} - ۰\right)^2 + \left(\frac{۳}{۲} - \frac{۵}{۲}\right)^2} = \sqrt{\frac{۲۵}{۴} + ۱} = \frac{\sqrt{۲۹}}{۲}$$

گزینه «۳»

وسط AB و AC را به ترتیب نقاط M و N می‌نامیم، سپس طول پاره خط MN را می‌یابیم:

$$M = \left[\begin{array}{c} \frac{۲+۶}{۲} \\ \frac{-۲-۴}{۲} \end{array}\right], \quad N = \left[\begin{array}{c} \frac{۲+۱۲}{۲} \\ \frac{-۴+۶}{۲} \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow M(۴, -۳), \quad N(۷, ۱)$$

$$\Rightarrow |MN| = \sqrt{(۴ - ۷)^2 + (-۳ - ۱)^2} = ۵$$

پاسخ: سوال ۵۸ گزینه ۳

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۲۹% متوسط

گزینه «۳»

نقطه A روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارد، پس اگر طول نقطه A را α در نظر بگیریم مختصات نقطه A به صورت $(\alpha, 2\alpha + 1)$ خواهد بود.

$$A(\alpha, 2\alpha + 1), M(1, -2), N(3, -4)$$

پاره‌خط‌های MA و NA موازی‌اند، بنابراین:

$$m_{MA} = m_{NA} \Rightarrow \frac{2\alpha+1-(-2)}{\alpha-1} = \frac{2\alpha+1-(-4)}{\alpha-3}$$

$$\Rightarrow (2\alpha + 3)(\alpha - 3) = (2\alpha + 5)(\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2 - 3\alpha - 9 = 2\alpha^2 + 3\alpha - 5 \Rightarrow -6\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = -\frac{2}{3}$$

پس مختصات نقطه A برابر است با:

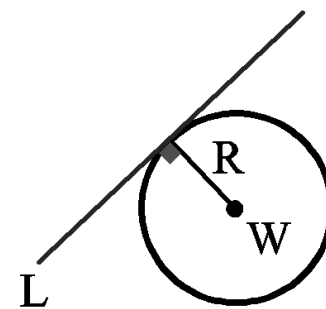
$$A(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \Rightarrow x_A + y_A = -1$$

پاسخ: سوال ۵۹ گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۴۴% ساده

گزینه «۱»

شعاع دایره بر خط مماس در نقطه تماس، عمود است، بنابراین فاصله مرکز دایره تا خط مماس برابر با شعاع دایره است.



ابتدا معادله خط L را به دست می‌آوریم؛ طول از مبدأ آن -2 و عرض از مبدأ آن 2 است، بنابراین:

$$L : \frac{x}{-2} + \frac{y}{2} = 1 \Rightarrow -x + y - 2 = 0$$

فاصله نقطه $W(4, 1)$ از خط L برابر است با:

$$R = \frac{|-4+1-2|}{\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 2/5\sqrt{2}$$

پاسخ: سوال ۶۰ گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۵۶% ساده

گزینه «۲»

اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) دو نقطه باشند، طول پاره‌خط بین آن‌ها برابر است با:

$$\text{طول پاره‌خط} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$\left. \begin{aligned} AB &= \sqrt{0^2 + 8^2} = 8 \\ AC &= \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} \\ BC &= \sqrt{6^2 + 4^2} = \sqrt{52} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مثلث متساوی‌الساقین است.}$$

$$(\sqrt{52})^2 + (\sqrt{52})^2 \neq 8^2$$

قضیه فیثاغورس برقرار نیست، پس مثلث قائم‌الزاویه نیست.

گزینه(۱)

برای به‌دست آوردن عرض نقطه D باید معادله خط AD را به‌دست آوریم و سپس مختصات نقطه تلاقی خطوط AD و BD را محاسبه می‌کنیم. چون خط BC با AD موازی است لذا شیب‌هایشان برابر است، پس برای نوشتن معادله خط AD داریم: $m_{AD} = ۲$:شیب خطAD $\Rightarrow ۲$ =شیب خطBC

معادله خط AD با شیب $m = ۲$ و نقطه $A|_۳$:

$$y - ۱ = ۲(x - ۳) \Rightarrow y - ۲x = -۵$$

نقطه D محل تلاقی خطوط BD و DA با یکدیگر است:

$$\begin{cases} y-۲x=-۵ \\ ۳y+۲x=۱ \\ ۴y=-۴ \end{cases} \Rightarrow y = -۱$$

گزینه «۴»

معادله خطی که از دو نقطه $A(x_۱, y_۱)$ و $B(x_۲, y_۲)$ می‌گذرد، عبارت است از:

$$y - y_۱ = \frac{y_۲ - y_۱}{x_۲ - x_۱}(x - x_۱)$$

$$A(-۲, ۳), B(۷, -۳) \Rightarrow y - ۳ = \frac{-۳ - ۳}{۷ + ۲}(x + ۲)$$

$$\Rightarrow y - ۳ = \frac{-۶}{۹}(x + ۲) \Rightarrow y - ۳ = \frac{-۲}{۳}(x + ۲)$$

$$\Rightarrow ۳(y - ۳) = -۲(x + ۲) \Rightarrow ۳y - ۹ = -۲x - ۴$$

$$\Rightarrow ۲x + ۳y = ۵$$

برای یافتن محل تلاقی خط با محور xها، y را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y = ۰ \Rightarrow ۲x + ۳(۰) = ۵ \Rightarrow ۲x = ۵ \Rightarrow x = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

گزینه «۳»

ابتدا به کمک حل دستگاه نقطه B محل برخورد دو خط را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} y = ۳x + ۱ & * \\ ۲y = x + ۷ & * \end{cases} \rightarrow ۲(۳x + ۱) = x + ۷ \\ \Rightarrow ۶x + ۲ = x + ۷ \Rightarrow x = ۱$$

$$\xrightarrow[x=۱]{y=۳x+۱} y = ۳ \times ۱ + ۱ = ۴ \Rightarrow B = (۱, ۴)$$

$$AB = \sqrt{(-۲ - ۱)^۲ + (۱ - ۴)^۲} = \sqrt{۹ + ۹} = \sqrt{۱۸} = ۳\sqrt{۲}$$

گزینه «۲»

$$AB \text{ وسط پاره خط } M = \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{۲} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{۲ - ۴}{۲} = -۱ \\ y_M = \frac{۴ + ۲}{۲} = ۳ \end{cases}$$

$$C \text{ از } M \text{ فاصله نقطه } = \sqrt{(-۲ + ۱)^۲ + (۱ - ۳)^۲} = \sqrt{۱ + ۴} = \sqrt{۵}$$

پاسخ: سوال ۶۵ گزینه ۱

قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۵۶% ساده

گزینه «۱»

نقطه به طول ۳ روی محور xها همان (۳, ۰) است.

نقطه‌ای به عرض ۲ روی خط $y = 2x - 2$ به صورت زیر است:

$$y=2 \rightarrow 2 = 2x - 2 \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 2)$$

$$m = \frac{2-0}{2-3} = -2 \text{ : شیب خط}$$

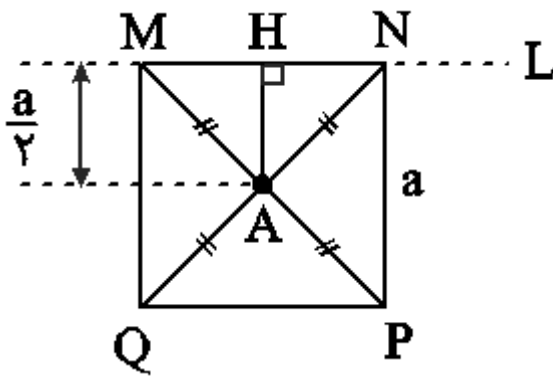
$$y - 2 = -2(x - 2) \Rightarrow y - 2 = -2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 6$$

پاسخ: سوال ۶۶ گزینه ۴

قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۳۴% متوسط

گزینه «۴»

شکل فرضی مقابل را در نظر می‌گیریم. همانطور که در شکل ملاحظه می‌شود، فاصله وسط قطر مربع از هر ضلع آن، برابر با نصف طول ضلع مربع است.



پس در این سؤال اگر طول ضلع مربع را a بنامیم، داریم:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} L : 2y - x - 5 = 0 \\ A(3, -1) \end{array} \right. &\Rightarrow AH = \frac{a}{2} = \frac{|2y_A - x_A - 5|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} \\ &\Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{|-2 - 3 - 5|}{\sqrt{5}} \Rightarrow a = \frac{20}{\sqrt{5}} \\ &\Rightarrow S = a^2 = \frac{400}{5} = 80 \text{ : مساحت مربع} \end{aligned}$$

پاسخ: سوال ۶۷ گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۳۵% متوسط

گزینه «۳»

$$\left. \begin{array}{l} \text{فاصله ی نقطه از خط} \\ y = x - 4 \xrightarrow{\text{فرض نقطه}} (k, k - 4) \\ 5y - x - 2 = 0 \end{array} \right\} \frac{|5k - 20 - k - 2|}{\sqrt{25 + 1}} = \frac{|4k - 22|}{\sqrt{26}} = \sqrt{26}$$

$$|4k - 22| = 26 \Rightarrow \begin{cases} 4k - 22 = 26 \Rightarrow 4k = 48 \Rightarrow k = 12 \\ 4k - 22 = -26 \Rightarrow 4k = -4 \Rightarrow k = -1 \end{cases}$$
$$11 = 12 + (-1) = \text{مجموع طول نقاط}$$

پاسخ: سوال ۶۸ گزینه ۳

قلم‌چی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۴۸% ساده

گزینه «۳»

اگر A' قرینه A نسبت به M باشد. پس M وسط پاره‌خط AA' است.

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow 2 = \frac{3 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 1 \\ y_M &= \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow 3 = \frac{-1 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 7 \\ &\Rightarrow A'(1, 7) \end{aligned}$$

پاسخ: سوال ۶۹ گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۲۸% متوسط

گزینه «۱»

در مثلث DMT مختصات رئوس $T \begin{vmatrix} ۰ \\ -۲ \end{vmatrix}$ و $M \begin{vmatrix} ۶ \\ ۳ \end{vmatrix}$ ، $D \begin{vmatrix} -۴ \\ ۰ \end{vmatrix}$ می‌باشد که فاصله نقاط T و D از هم برابر قاعده مثلث می‌باشد که برابر است با:

$$DT = \sqrt{(۰ - (-۴))^۲ + (-۲ - ۰)^۲} = \sqrt{۱۶ + ۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

ارتفاع مثلث نیز برابر MH می‌باشد که از رابطه فاصله نقطه از خط به دست می‌آید:

فاصله نقطه $M \begin{vmatrix} ۶ \\ ۳ \end{vmatrix}$ از خط $x + ۲y + ۴ = ۰$

$$\Rightarrow d = \frac{|۶+۶+۴|}{\sqrt{۱+۴}} = \frac{۱۶}{\sqrt{۵}}$$

ارتفاع قاعده = مساحت مثلث (DMT)

$$= \frac{۲\sqrt{۵} \times \frac{۱۶}{\sqrt{۵}}}{۲} = ۱۶$$

پاسخ: سوال ۷۰ گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۵۳% ساده

گزینه «۲»

چون M وسط پاره خط AB است، بنابراین:

$$x_m = \frac{x_A + x_B}{۲} \Rightarrow ۲ = \frac{۱ + x_B}{۲} \Rightarrow x_B = ۳$$

$$y_m = \frac{y_A + y_B}{۲} \Rightarrow ۳ = \frac{۴ + y_B}{۲} \Rightarrow y_B = ۲$$

فاصله نقطه B تا مبدأ برابر است با:

$$OB = \sqrt{x_B^۲ + y_B^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۲^۲} = \sqrt{۱۳}$$

پاسخ: سوال ۷۱ گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۵۰% ساده

گزینه «۱»

شیب خط $۱۶ = ۴y + ۳x$ برابر $\frac{-۳}{۴}$ است.

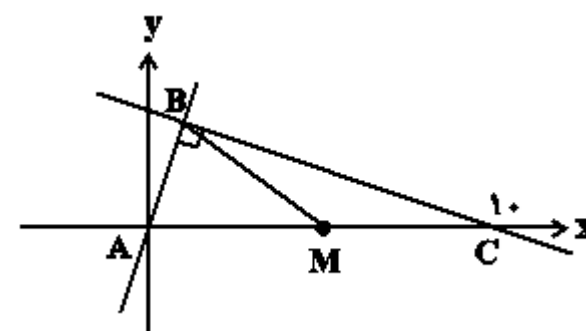
پس شیب خط مورد نظر $\frac{۴}{۳}$ است و معادله آن با توجه به گزینه‌ها به صورت $-۴x + ۳y + c = ۰$ است. حال چون فاصله نقطه (۱, ۱) از این خط برابر ۳ است، پس:

$$\frac{|-۴ \times ۱ + ۳ \times ۱ + c|}{\sqrt{۴^۲ + ۳^۲}} = ۳ \Rightarrow |c - ۱| = ۱۵$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c - ۱ = ۱۵ \Rightarrow c = ۱۶ \\ c - ۱ = -۱۵ \Rightarrow c = -۱۴ \end{cases}$$

بنابراین معادله خط مورد نظر با توجه به گزینه‌ها $-۴x + ۳y - ۱۴ = ۰$ است.

گزینه «۳»

ابتدا مثلث را رسم می‌کنیم؛ دقت کنید $AB \perp BC$ است. میانه BM خطی است که از وسط ضلع AC یعنی $M(۵, ۰)$ می‌گذرد.



برای محاسبه B دو خط AB و BC را تلاقی می‌دهیم:

$$x(۳) \begin{cases} y - ۳x = ۰ \\ ۳y + x = ۱۰ \end{cases} \quad \text{مختصات } B \quad y = ۳, \quad x = ۱$$

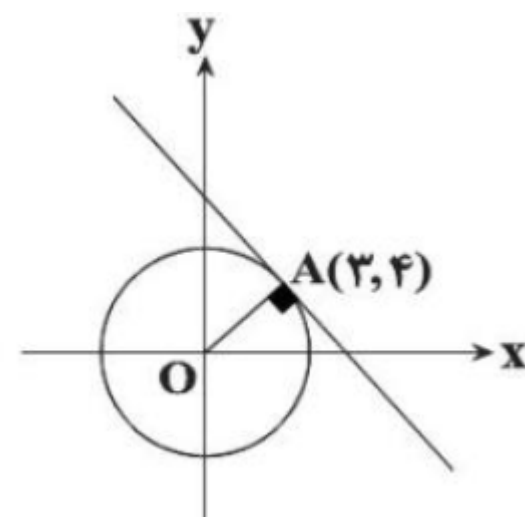
$$\text{معادله } BM: y - ۰ = \frac{۳-۰}{۱-۵}(x - ۵)$$

$$y = -\frac{۳}{۴}(x - ۵)$$

گزینه «۱»

$$\text{شیب } OA = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{۴}{۳}$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط} = -\frac{۳}{۴}$$



می‌دانیم که خط مماس بر دایره در نقطه تماس بر شعاع دایره عمود است.

$$y = \frac{-۳}{۴}x + b \xrightarrow{A(۳,۴)} ۴ = \frac{-۳}{۴}(۳) + b \Rightarrow b = ۴ + \frac{۹}{۴}$$

$$b = ۴ + ۲/۲۵ \Rightarrow b = ۶/۲۵$$

گزینه «۱»

ابتدا معادله خط گذرا از A و B رابه‌دست آورده و سپس فاصله نقطه P از خط AB را می‌یابیم:

$$m_{AB} = \frac{-1+4}{1+3} = \frac{3}{4}$$

$$AB \text{ از } y + 1 = \frac{3}{4}(x - 1) \Rightarrow 3x - 4y - 7 = 0$$

$$B \text{ و } A \text{ از } P \text{ فاصله} = \frac{|3a-4a-7|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-a-7|}{5}$$

$$= 2 \Rightarrow |-a-7| = 10$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a-7=10 \Rightarrow -a=17 \rightarrow a=-17 \\ a+7=10 \Rightarrow a=3 \end{cases}$$

هر دو مقدار قابل قبول است.

گزینه (۳)

حاصل‌ضرب شیب دو خط عمود بر هم برابر ۱- می‌باشد، بنابراین:

$$m_{AB} = \frac{4-2}{1-(m-1)} = \frac{2}{2-m}$$

$$2y + 3x = 1 \Rightarrow 2y = -3x + 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{3}{2} \quad m_1 \times m_2 = -1 \xrightarrow{\text{چون دو خط بر هم عمود هستند}} \frac{2}{2-m} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 \Rightarrow \frac{2}{2-m} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 2 - m = 3 \Rightarrow m = -1$$

گزینه «۱»

نکته: اگر A' قرینه A نسبت به خط d باشد، آنگاه خط گذرنده از A و A' بر خط d عموداست.

پس برای به‌دست آوردن مختصات نقطه A' کافی است، ابتدا معادله خط گذرنده از A و A' را بنویسیم و سپس با خط d تقاطع دهیم تا مختصات نقطه H به‌دست آید. نقطه H نقطه‌ای است که مختصات طول و عرض آن میانگین مختصات طول و عرض A و A' است:

$$d : y = x + 1 \Rightarrow \text{شیب} = 1 \Rightarrow m' = -1$$

$$d' \text{ معادله خط } y - y_A = m'(x - x_A)$$

$$y - 1 = -1(x - 2)$$

از تقاطع معادله دو خط d و d' مختصات نقطه H به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -x + 3 \end{cases} \Rightarrow -x + 3 = x + 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

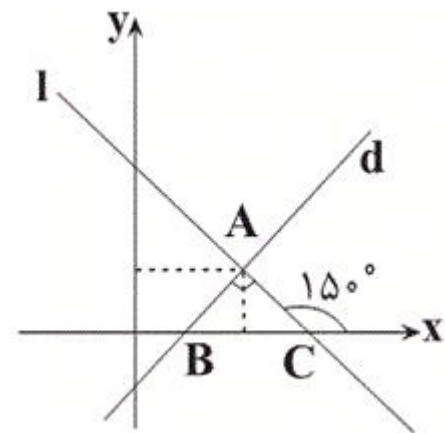
$$y = 2 \Rightarrow H \left| \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} x_H &= \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2x_H - x_A = 2 - 2 = 0 \\ y_H &= \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 2y_H - y_A = 4 - 1 = 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow A'(0, 3)$$

گزینه «۴»

ابتدا خط d را عمود بر خط l از نقطه $(\sqrt{3}, 1)$ رسم می‌کنیم. همان‌طور که از نمودار مشخص است زاویه را به دست می‌آوریم.



$$\hat{ACB} = 30^\circ, \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \hat{ABC} = 60^\circ$$

به عبارتی زاویه خط d با جهت مثبت محور xها برابر با 60° می‌باشد. یعنی داریم:

$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{معادله خط } d: y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[\begin{smallmatrix} m=\sqrt{3} \\ (\sqrt{3}, 1) \end{smallmatrix}]{}$$

$$y - 1 = \sqrt{3}(x - \sqrt{3}) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 2$$

توجه: در بین گزینه‌ها فقط در گزینه «۴»، شیب خط برابر $\sqrt{3}$ است.

گزینه «۳»

$$(0, -1), (2, 0) \Rightarrow m_{d_1} = \frac{-1 - 0}{0 - 2} = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} m=\frac{1}{2} \\ (0, 3) \end{smallmatrix}]{y - 3 = \frac{1}{2}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 3}$$

$$\xrightarrow{x=4} y = 5$$

$$\xrightarrow{x=2} y = 4$$

بنابراین از نقطه $(2, 4)$ می‌گذرد.

گزینه «۲»

طول پاره‌خط AC برابر قطر مربع است.

$$AC = \sqrt{(2 - 4)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

قطر مربع $\sqrt{2}$ برابر ضلع مربع است. بنابراین: $a = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2$

$$\Rightarrow p = 4 \times 2 = 8 \text{ : محیط مربع}$$

گزینه «۳»

مقدار مینیمم تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a > 0$) به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید:

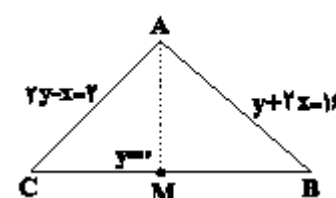
$$x = \frac{-4}{2 \times \frac{1}{4}} = -4$$

$$\Rightarrow f(-4) = \frac{1}{4} \times (-4)^2 + 4(-4) - 1$$

$$\Rightarrow f(-4) = 1 - 16 - 1 = -9$$

گزینه ۲

با توجه به مثلث فرضی زیر، مختصات نقاط رأس مثلث را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن مختصات نقطه A، محل تلاقی دو خط AB و AC را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} 2y - x = 2 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow y = 4, x = 6 \Rightarrow A(6, 4)$$

مختصات نقطه B، از محل تلاقی دو خط AB و BC به دست می‌آید.

$$\begin{cases} y = 0 \\ y + 2x = 16 \end{cases} \Rightarrow 0 + 2x = 16 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow B(8, 0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2y - x = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 - x = 2 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow C(-2, 0)$$
 مختصات نقطه C:

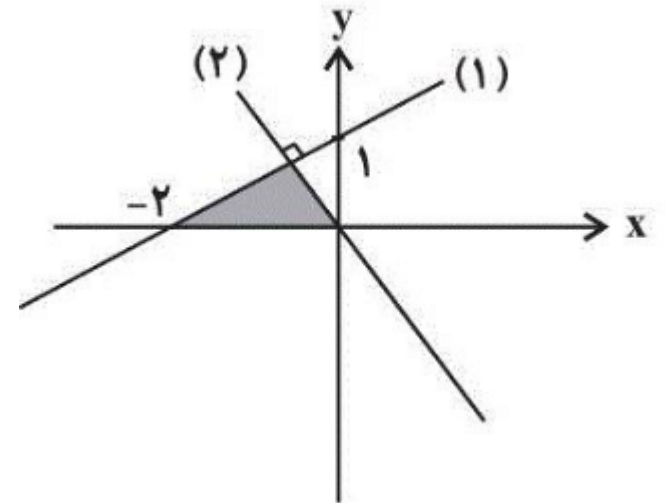
برای به دست آوردن اندازه میانه AM داریم:

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{8 - 2}{2} = 3 \\ y_M = \frac{0 + 0}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow M(3, 0)$$

$$AM = \sqrt{(6 - 3)^2 + (4 - 0)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

گزینه «۲»

برای به دست آوردن مساحت مثلث هاشورخورده ابتدا باید عرض نقطه برخورد دو خط را به دست آوریم تا ارتفاع مثلث مشخص شود. نقاط $(0, 1)$ و $(-2, 0)$ روی خط (۱) قرار دارند. معادله خط (۱) عبارت است از:



$$(1) \text{ شیب خط } m = \frac{1-0}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{(0,1)} y - 1 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$(1) \text{ معادله خط } : y_1 = \frac{1}{2}x + 1$$

دو خط (۱) و (۲) برهم عمودند، لذا شیب خط (۲) قرینه معکوس شیب خط (۱) است. همچنین خط (۲) از مبدأ مختصات می‌گذرد، لذا معادله آن عبارت است از:

$$y_2 = -2x$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه تقاطع دو خط}} y_1 = y_2 \Rightarrow \frac{1}{2}x + 1 = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + 2x = -1 \Rightarrow \frac{5}{2}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{2}{5}$$

عرض نقطه برخورد دو خط = ارتفاع مثلث هاشورخورده

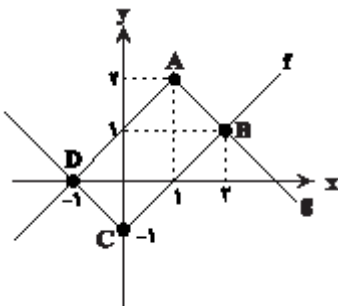
$$\Rightarrow y = -2 \times \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

ارتفاع $\times$ قاعده $\times \frac{1}{2} = S$: مساحت مثلث هاشورخورده

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{5} = \frac{4}{5} = 0.8$$

گزینه «۲»

نمودار توابع f و g را رسم می‌کنیم:



چهارضلعی ABCD یک مستطیل است. به کمک مختصات نقاط A و C، طول قطر AC را می‌یابیم:

$$A(1, 2), C(0, -1)$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

گزینه «۲»

$$-2x + y - m = 0 \Rightarrow \frac{|2+2-m|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|4-m|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

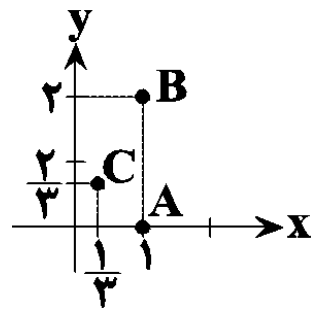
$$\Rightarrow |4 - m| = \sqrt{5} \times \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow |4 - m| = 5 \Rightarrow \begin{cases} 4 - m = 5 \Rightarrow m = -1 \\ 4 - m = -5 \Rightarrow m = 9 \end{cases}$$

گزینه «۱»

مطابق شکل، سه نقطه به مختصات $A(1, 0)$ ، $B(1, 2)$ و $C(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ رئوس مثلث‌اند.

AB بزرگ‌ترین ضلع مثلث است که متناظر با کوچک‌ترین ارتفاع مثلث است. معادله $x = 1$ مربوط به ضلع AB است، پس معادله کوچک‌ترین ارتفاع عبارتست از:

$$y = y_C = \frac{2}{3}$$


گزینه «۱»

ابتدا رأس قائم مثلث را پیدا می‌کنیم تا وتر آن مشخص شود، برای این منظور داریم:

$$C(2, -1), B(-2, 1), A(-1, 2)$$

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2-1}{-1-(-2)} = \frac{1}{1} = 1 \\ m_{BC} = \frac{1-(-1)}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ m_{AC} = \frac{2-(-1)}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases}$$

چون $m_{AB} \times m_{AC} = -1$ ، یعنی مثلث در رأس $A(-1, 2)$ قائمه است و وتر آن پاره‌خط BC است. حال کفایت فاصله نقطه وسط پاره‌خط BC تا خط $x + 2y - 4 = 0$ را به دست آوریم.

$$\begin{cases} B(-2, 1) \\ C(2, -1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{(-2) + (2)}{2} = 0 \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{1 + (-1)}{2} = 0 \end{cases}$$

$(0, 0)$ = وسط وتر = وسط پاره‌خط BC

فاصله نقطه $(0, 0)$ از خط $x + 2y - 4 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 \times 0 + 2 \times 0 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

گزینه «۳»

اگر دو خط بر هم عمود باشند، حاصل ضرب شیب‌هایشان ۱- است.

$$\left. \begin{array}{l} \text{شیب خط اول} : \frac{-(m+1)}{2} \\ \text{شیب خط دوم} : \frac{-2}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-m-1}{2} \times \frac{-2}{3} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{3} = -1 \Rightarrow m = -4$$

عرض محل برخورد را با تشکیل دستگاه به دست می‌آوریم.

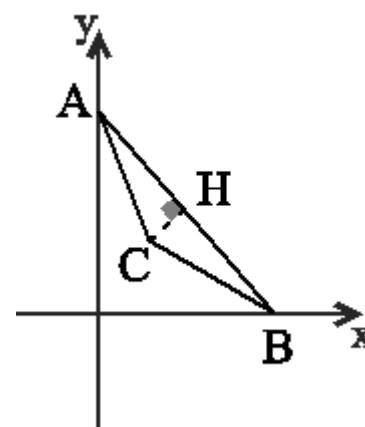
$$\begin{cases} -3x + 2y = 3 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -6x + 4y = 6 \\ 6x + 9y = -3 \end{cases}$$

$$13y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{13}$$

گزینه «۱»

شکلی از مسأله رسم می‌کنیم.

با توجه به شکل، معادله AB را می‌یابیم. سپس فاصله نقطه C را از آن به دست می‌آوریم.



$$\begin{cases} A(0, 3) \\ B(2, 0) \end{cases} \Rightarrow \text{معادله خط AB} : y - 0 = \frac{3-0}{0-2}(x-2)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{3}{2}(x-2) \Rightarrow 2y = -3x + 6$$

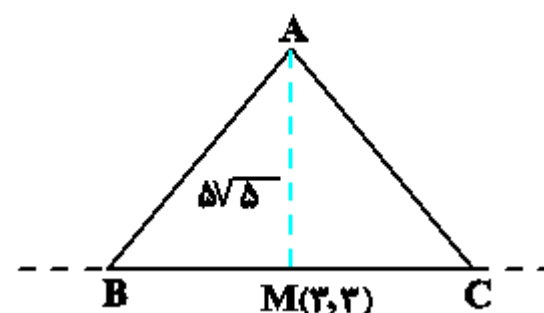
فاصله رأس C (۱, ۱) را از این ضلع می‌یابیم:

$$\begin{cases} \text{معادله AB} : 2y + 3x - 6 = 0 \\ C(1, 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow CH = \frac{|2(1)+3(1)-6|}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

گزینه «۲»

با توجه به شکل روبه‌رو داریم:



$$x + 2y = 7 \text{ یا } y = \frac{-1}{2}x + \frac{7}{2}$$

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، میانه وارد بر قاعده مثلث (AM) ارتفاع نیز می‌باشد. بنابراین معادله خط AM برابر است با:

$$m_{AM} = 2 \rightarrow y - 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 4$$

نقطه A روی خط AM قرار دارد و با توجه به اندازه میانه AM داریم:

$$A(\alpha, 2\alpha - 4) \rightarrow AM = \sqrt{(\alpha - 3)^2 + (2\alpha - 4 - 2)^2} = 5\sqrt{5}$$

$$\xrightarrow{\text{توان 2}} \alpha^2 - 6\alpha + 9 + 4\alpha^2 + 36 - 24\alpha = 125$$

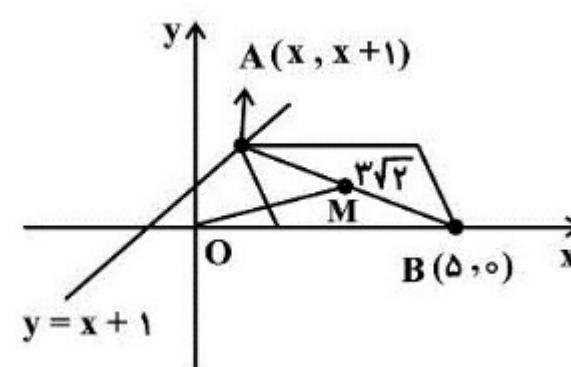
$$\Rightarrow 5\alpha^2 - 30\alpha - 80 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 6\alpha - 16 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha - 8)(\alpha + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 8 \\ \alpha = -2 \end{cases}$$

تنها $\alpha = -2$ در گزینه دوم وجود دارد.

گزینه «۲»

زچون نقطه A روی خط $y = x + 1$ واقع است بنابراین مختصات آن $(x, x + 1)$ است و فاصله نقاط $A(x, x + 1)$ و $B(5, 0)$ برابر طول قطر بزرگ است.



بنابراین داریم:

$$AB = \sqrt{(x - 5)^2 + (x + 1)^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}} (x - 5)^2 + (x + 1)^2 = 18$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 25 + x^2 + 2x + 1 = 18 \Rightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تقسیم بر ۲}} x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین $A(2, 3)$ خواهد بود. همچنین در متوازی‌الاضلاع قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند. لذا نقطه تلاقی قطرها همان وسط پاره‌خط AB می‌باشد.

$$AB \text{ وسط پاره‌خط } M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

طول OM را محاسبه می‌کنیم:

$$OM = \sqrt{\left(\frac{7}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{74}{4}} = \sqrt{\frac{37}{2}}$$

پاسخ:

سوال ۹۱

گزینه ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

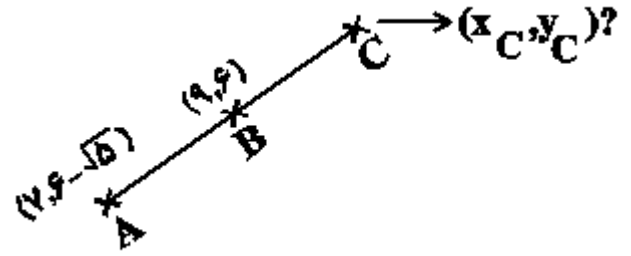
درصد پاسخگویی ۳۶%

ساده

گزینه «۲»

برای محاسبه مساحت یک مربع به قطر d داریم: $S = \frac{d^2}{2}$

سپس برای به‌دست آوردن مساحت باید اندازه قطر را محاسبه کنیم. برای اینکار ابتدا باید مختصات نقطه قرینه را پیدا کنیم، داریم:



$$x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow 9 = \frac{7 + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 11$$

$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow 6 = \frac{-5 + y_C}{2} \Rightarrow y_C = 17$$

$$\Rightarrow C(11, 17)$$

طول پاره‌خط AC برابر است با قطر مربع(d)، حال داریم:

$$\begin{aligned} AC = d &= \sqrt{((17 - (-5)) - (6 - 9))^2 + (11 - 7)^2} \\ &= \sqrt{20 + 16} = \sqrt{36} = 6 \\ \Rightarrow S &= \frac{d^2}{2} = \frac{(6)^2}{2} = 18 \end{aligned}$$

پاسخ:

سوال ۹۲

گزینه ۱

گزینه های دام دار ۲

قلم‌چی ۱۳۹۹

درصد پاسخگویی ۱۴%

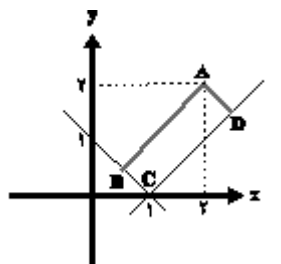
دشوار

گزینه «۱»

ضابطه‌های تابع $y = |x - 1|$ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$y = |x - 1| = \begin{cases} -x + 1; x < 1 \\ x - 1; x \geq 1 \end{cases}$$

که نمودار آن به همراه نقطه A در شکل زیر رسم شده است:



واضح است که طول اضلاع مستطیل برابر است با فاصله نقطه A از شاخه‌های نمودار تابع $y = |x - 1|$. پس داریم:

$$\Rightarrow S_{ABCD} = AB \cdot AD = \frac{3}{2} \begin{cases} AB = \frac{|2 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \\ AD = \frac{|2 - 2 + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

پاسخ: سوال ۹۳ گزینه ۴

ساده درصد پاسخگویی ۴۵% قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۴»

در لوزی، همواره قطرها بر هم عمودند، پس شیب دو خط باید قرینه و معکوس یکدیگر باشد.

$$3x + (m + 2)y = 3 \xrightarrow{\text{شیب خط}} m_1 = \frac{-3}{m+2}$$
$$\xrightarrow{\text{قرینه ی معکوس}} \frac{m+2}{3}$$

$$2x - (m + 3)y + 6 = 0 \xrightarrow{\text{شیب خط}} m_2 = \frac{-2}{-(m+3)}$$
$$= \frac{2}{m+3}$$

$$\Rightarrow \frac{m+2}{3} = \frac{2}{m+3} \Rightarrow m^2 + 5m + 6 = 6$$

$$\Rightarrow m^2 + 5m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ ق ق} \\ m = -5 \text{ ق ق} \end{cases}$$

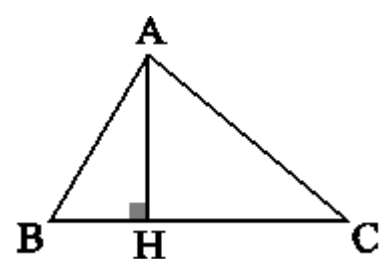
تنها $m = -5$ در گزینه «۴» موجود است.

پاسخ: سوال ۹۴ گزینه ۲

ساده درصد پاسخگویی ۵۱% قلمچی ۱۳۹۹

گزینه «۲»

شکل فرضی مقابل را در نظر بگیرید، ارتفاع AH بر ضلع BC عمود است و از نقطه A می‌گذرد. ابتدا شیب BC را بدست می‌آوریم:



$$m_{BC} = \frac{-2-0}{1-3} = 1$$

$$m_{AH} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AH} = -1 \text{ و } A(-1, 2)$$

$$\Rightarrow \text{معادله AH: } y - 2 = -1(x + 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

گزینه «۴»

می‌دانیم اگر خطی بر دایره مماس باشد آن‌گاه شعاع دایره در نقطه تماس بر خط، عمود است. بنابراین فاصله مرکز دایره تا خط مماس همان اندازه شعاع دایره است.

: شعاع دایره C_1 به مرکز $O_1(2, 6)$

$$r_1 = \frac{|1 \times 2 + 1 \times 6 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

: شعاع دایره C_2 به مرکز $O_2(-1, 3)$

$$r_2 = \frac{|1 \times (-1) + 1 \times 3 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

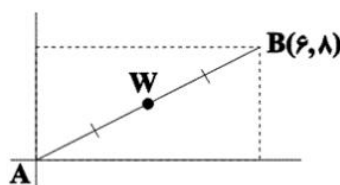
چون $r_1 > r_2$ است، بنابراین C_1 دایره بزرگ‌تر است.

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 \text{ مساحت دایره} : S_1 = \pi r_1^2 = \pi \left(\frac{7}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{49\pi}{2} \\ C_2 \text{ مساحت دایره} : S_2 = \pi r_2^2 = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{49\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = 49$$

گزینه «۳»

با دقت در معادله دو خط داده شده و شیب آن‌ها، متوجه می‌شویم دو خط بر هم عمودند (حاصل ضرب شیب‌های آن‌ها (-۱) است) و از طرفی نقطه داده شده در هیچ یک از آن‌ها صدق نمی‌کند. پس می‌توان شکل فرضی مطلوب سوال را به صورت زیر رسم کرد:



$$\begin{cases} y = 3x \\ 6y + 2x = 40 \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه}} A(2, 6)$$

نقطه تقاطع قطرهای مستطیل، وسط AB است که مختصات آن برابر است با:

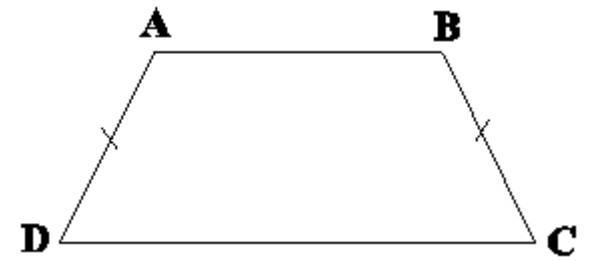
$$\begin{cases} x_W = \frac{2+6}{2} = 4 \\ y_W = \frac{6+8}{2} = 7 \end{cases}$$

پاسخ: سوال ۹۷ گزینه ۱

گزینه های دام دار ۲ قلمچی ۱۴۰۰ درصد پاسخگویی ۸% دشوار

گزینه «۱»

با توجه به شکل زیر، واضح است که در دوزنقه متساوی الساقین با قاعده های موازی محور Xها، اندازه شیب ساق های دوزنقه با هم برابر بوده اما از لحاظ علامت قرینه هم می باشند. بنابراین:



$$m_{AD} = -m_{BC}$$

حال برای این که خطوط $y - (n - 1)x = 4$ و $(n + 2)y - 2x - 3 = 0$ منطبق بر ساق های دوزنقه متساوی الساقین باشند، باید شیب این خطوط قرینه هم باشند، پس:

$$\begin{cases} (n + 2)y - 2x - 3 = 0 \Rightarrow y = (\frac{2}{n + 2})x + \frac{3}{n + 2} \Rightarrow m_1 = \frac{2}{n + 2} \\ y - (n - 1)x = 4 \Rightarrow y = (n - 1)x + 4 \Rightarrow m_2 = n - 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_1 = -m_2 \Rightarrow \frac{2}{n + 2} = -(n - 1) \Rightarrow n^2 + n = 0$$

$$\Rightarrow n(n + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = -1 \end{cases}$$

هیچ یک از مقادیر به دست آمده برای n، طبیعی نیستند.

پاسخ: سوال ۹۸ گزینه ۲

قلمچی ۱۴۰۰ درصد پاسخگویی ۳۸% ساده

گزینه «۲»

نقاط تلاقی خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ مرکز دایره است:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -1 \Rightarrow O(2, -1)$$

فاصله مرکز دایره تا خط مماس $x - y = 1$ برابر شعاع دایره است:

$$\begin{cases} O(2, -1) \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow R = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow S_{\text{دایره}} = \pi R^2 = 2\pi$$

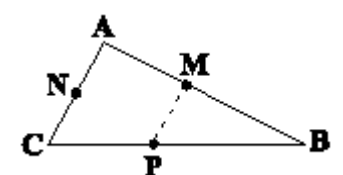
پاسخ: سوال ۹۹ گزینه ۲

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۱۶% متوسط

گزینه «۲»

با توجه به عکس قضیه تالس نتیجه می گیریم که خط MP موازی ضلع AC است، پس شیب های برابر دارند. پس:

$$m_{AC} = m_{MP} = \frac{y_P - y_M}{x_P - x_M} = \frac{-4 - (-2)}{-2 - (-1)} = \frac{-2}{-1} = 2$$



همچنین معادله خطی که از نقطه N گذشته و شیب آن برابر ۲ است، برابر است با:

$$\begin{aligned} y - y_N &= m(x - x_N) \Rightarrow y - 4 = 2(x - 3) \\ \Rightarrow y - 4 &= 2x - 6 \Rightarrow y - 2x &= -2 \end{aligned}$$

گزینه ۱

فاصله نقطه $A(۵, ۰)$ از نقطه دلخواه $B(x, y)$ روی منحنی به معادله $y = \sqrt{۲x + ۷}$ برابر است با:

$$d = \sqrt{(x - ۵)^۲ + (y - ۰)^۲} = \sqrt{(x - ۵)^۲ + (\sqrt{۲x + ۷})^۲} = \sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}$$

برای به دست آوردن کوتاه‌ترین فاصله داریم:

$$d' = \frac{۲x - ۸}{۲\sqrt{x^۲ - ۸x + ۳۲}} = ۰ \Rightarrow ۲x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

$$d = \sqrt{۴^۲ - ۸(۴) + ۳۲} = ۴ \quad \text{فاصله دو نقطه A و B برابر است با:}$$

گزینه «۲»

باید فاصله خط $k = ۳x + ۴y$ تا مرکز دایره برابر ۲ واحد باشد تا بر دایره مماس باشد.

$$۳x + ۴y - k = ۰$$

$$\Rightarrow R = \frac{|۳(-۲) + ۴(۱) - k|}{\sqrt{۳^۲ + ۴^۲}} = ۲$$

$$\frac{| - ۲ - k |}{۵} = ۲ \Rightarrow | - ۲ - k | = ۱۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲ - k = ۱۰ \Rightarrow k = -۱۲ \\ -۲ - k = -۱۰ \Rightarrow k = ۸ \end{cases}$$

گزینه «۴»

با توجه به محل‌های مختلف قرارگیری رأس چهارم متوازی‌الاضلاع هر دو نقطه از ۳ نقطه A, B, C می‌توانند یکی از دو قطر متوازی‌الاضلاع را تشکیل دهد. در نتیجه وسط آن‌ها محل تقاطع قطرهای خواهد بود. اگر D, E, F را به ترتیب وسط AB, AC, BC در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$D = \begin{cases} \frac{۲+۶}{۲} = ۴ \\ \frac{۲+۲}{۲} = ۲ \end{cases} \Rightarrow D(۴, ۲)$$

$$E = \begin{cases} \frac{۲+۱۰}{۲} = ۶ \\ \frac{۲+۸}{۲} = ۵ \end{cases} \Rightarrow E(۶, ۵)$$

$$F = \begin{cases} \frac{۶+۱۰}{۲} = ۸ \\ \frac{۲+۸}{۲} = ۵ \end{cases} \Rightarrow F(۸, ۵)$$

پاسخ: سوال ۱۰۳ گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۳۶% متوسط

ابتدا رأس قائم مثلث را پیدا می‌کنیم تا وتر مشخص شود. برای این منظور داریم:

$$\begin{cases} m_{AB} = \frac{2-1}{-1-(-2)} = \frac{1}{1} \\ m_{BC} = \frac{1-(-1)}{-2-2} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \\ m_{AC} = \frac{2-(-1)}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -1 \end{cases}$$

$$C = (2, -1), B = (-2, 1), A = (-1, 2)$$

چون $m_{AB} \times m_{AC} = -1$ پس AB بر AC عمود بوده، یعنی مثلث در رأس A قائمه است و وتر آن BC است.

کافی است معادله خط گذرنده از نقاط B و C را به دست آوریم.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow[m=-\frac{1}{2}]{B(-2,1)} y - 1 = -\frac{1}{2}(x + 2)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}x$$

همانطور که از معادله خط به دست آمده مشخص است خط از مبدأ مختصات گذشته و محور ها را با طول صفر قطع می‌کند.

پاسخ: سوال ۱۰۴ گزینه ۳

گزینه های دام دار ۱ قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۱۸% متوسط

گزینه «۳»

توجه کنید که قطر هر دایره از مرکز آن می‌گذرد، پس مرکز این دایره روی خط به معادله $x - y = 2$ ، قرار دارد، بنابراین می‌توانیم مختصات مرکز آن را بصورت $(\beta + 2, \beta)$ در نظر بگیریم. فاصله مرکز دایره از هر نقطه دلخواه واقع بر آن، برابر با شعاع دایره است، چون دو نقطه $A(0, 1)$ و $B(3, 0)$ بر این دایره واقعند، پس:

$$R = \omega A = \omega B$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(\beta + 2 - 0)^2 + (\beta - 1)^2} = \sqrt{(\beta + 2 - 3)^2 + (\beta - 0)^2}$$

$$\Rightarrow (\beta + 2)^2 + (\beta - 1)^2 = (\beta - 1)^2 + \beta^2 \Rightarrow (\beta + 2)^2 = \beta^2$$

$$\Rightarrow \beta^2 + 4\beta + 4 = \beta^2 \Rightarrow 4\beta + 4 = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{(-1 + 2)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{5}$$

پاسخ: سوال ۱۰۵ گزینه ۱

قلمچی ۱۳۹۹ درصد پاسخگویی ۶۳% ساده

$$\text{قطر دایره} = AB = \sqrt{(0 - 3)^2 + (3 - 7)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

$$\Rightarrow r = \frac{5}{2} : \text{شعاع دایره}$$

$$\Rightarrow S = \pi r^2 = \pi \times \frac{25}{4} = \frac{25\pi}{4}$$

گزینه «۲»

ابتدا شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$r = \frac{|۲+۲+۱|}{\sqrt{۲^۲+۱^۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۵}} = \sqrt{۵}$$

محل تقاطع دایره با محور xها نقطه (x , ۰) می‌باشد. بنابراین فاصله مرکز با این نقطه برابر $\sqrt{۵}$ می‌شود. مختصات مرکز دایره (۱ , ۲) می‌باشد.

$$\sqrt{(x-۲)^۲+۱^۲} = \sqrt{۵} \Rightarrow (x-۲)^۲+۱ = ۵ \Rightarrow$$

$$(x-۲)^۲ = ۴ \Rightarrow \begin{cases} x-۲ = ۲ \\ x-۲ = -۲ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = ۴ \\ x = ۰ \end{cases}$$

گزینه «۳»

چون خط D' موازی خط D است، معادله آن را به صورت $۳x + ۴y + k = ۰$ در نظر می‌گیریم.

از طرفی فاصله دو خط نیز برابر قطر دایره است:

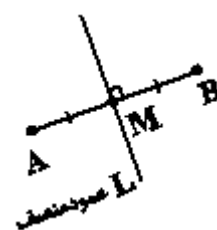
$$۲R = ۴ = \frac{|k+۷|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}} = \frac{|k+۷|}{۵} \Rightarrow |k+۷| = ۲۰$$

$$\Rightarrow k+۷ = \pm ۲۰ \Rightarrow k = -۲۷ \text{ یا } K = ۱۳$$

عرض از مبدأ D' برابر $-\frac{k}{۴}$ است. بنابراین این مقدار می‌تواند $-\frac{۱۳}{۴}$ یا $\frac{۲۷}{۴}$ باشد.

گزینه «۴»

نکته مهم: تمامی نقاط موجود روی عمودمنصف یک پاره خط از دو سر پاره‌خط به فاصله یکسان قرار دارند.



$$m_{AB} = \frac{۶-(-۲)}{۳-(-۵)} = ۱ \xrightarrow{\text{قرینه و معکوس}} m_L = -۱$$

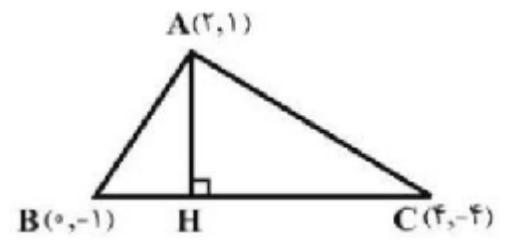
$$x_M = \frac{-۵+۳}{۲} = -۱$$

$$y_M = \frac{-۲+۶}{۲} = ۲$$

$$L \text{ معادله خط : } y - ۲ = -۱(x + ۱) \Rightarrow y = -x + ۱$$

با توجه به گزینه‌ها تنها مختصات نقطه (۴, -۳) در این خط صدق می‌کند.

گزینه «۱»



کافی است معادلات ضلع BC و ارتفاع AH را نوشته و قطع بدهیم تا مختصات نقطه H بدست آید:

$$m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-4 - (-1)}{4 - 0} = \frac{-3}{4}$$

$$BC \text{ ضلع معادله: } y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 0) \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x - 1$$

$$AH \text{ شیب ارتفاع} = -\frac{1}{m_{BC}} = \frac{4}{3} \Rightarrow AH \text{ معادله ارتفاع} -1 = \frac{4}{3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{10}{3} + 1 \Rightarrow y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$$

معادله دو خط را با هم قطع می‌دهیم:

$$\begin{cases} y = -\frac{3}{4}x - 1 \\ y = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3} \end{cases} \xrightarrow{\text{قطع}} -\frac{3}{4}x - 1 = \frac{4}{3}x - \frac{7}{3}$$

$$x_H = \frac{1}{25} \xrightarrow{y = -\frac{3}{4}x - 1} y_H = -\frac{6}{25} - 1 = -\frac{31}{25}$$

پس مختصات نقطه H به صورت $H(\frac{1}{25}, -\frac{31}{25})$ است.

$$\Rightarrow 25(a + b) = 25(\frac{1}{25} - \frac{31}{25}) = 25(-\frac{30}{25}) = -30$$

گزینه «۲»

نکته ۱: مختصات نقطه وسط‌پاره‌خط BC عبارت است از:

$$M = (\frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2})$$

نکته ۲: طول پاره‌خط AM برابر است با:

$$AM = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$$

میانه AM پاره‌خطی است که نقطه A را به وسط BC وصل می‌کند، بنابراین:

ابتدا مختصات نقطه M (وسط پاره‌خط BC) را به دست می‌آوریم:

$$M(\frac{3+7}{2}, \frac{-3+7}{2}) = M(5, 2)$$

بنابراین طول میانه AM برابر است با:

$$AM = \sqrt{(1 - 5)^2 + (5 - 2)^2} = 5$$

گزینه «۱»

طول پاره‌خط AC که همان قطر مربع است، برابر است با:

$$AC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\text{طول قطر مربع} = d = \sqrt{(3 - 7)^2 + (9 - 5)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

تذکر: در مربعی به طول ضلع a، طول قطر برابر $d = \sqrt{2}a$ است.

$$\Rightarrow \sqrt{2}a = \sqrt{32} \Rightarrow a = \sqrt{16} = 4$$

$$\Rightarrow \text{محیط مربع} = 4 \times 4 = 16$$

گزینه «۴»

ابتدا نقطه M وسط پاره خط AB را پیدا می‌کنیم:

$$M = \left[\begin{array}{c} \frac{5+3}{2} \\ \frac{-1+1}{2} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 4 \\ 0 \end{array} \right]$$

شیب خط عمودمنصف، قرینه معکوس شیب خط AB است. بنابراین:

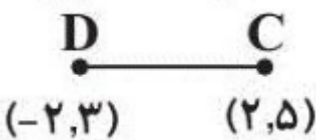
$$m_{AB} = \frac{-1 - 1}{5 - 3} = -1 \Rightarrow m' = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 4) \Rightarrow y = x - 4$$

$$\xrightarrow{y=0} 0 = x - 4 \Rightarrow x = 4$$

گزینه «۱»

معادله خط عمودمنصف پاره خط DC را به‌دست می‌آوریم.



$$\text{شیب DC} = \frac{5-3}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \text{شیب خط عمودمنصف DC} = -2$$

$$\text{DC نقطه وسط : } \left(\frac{2+(-2)}{2}, \frac{5+3}{2} \right) = (0, 4)$$

هر نقطه روی نیم ساز ناحیه اول و سوم

$$\xrightarrow{\text{طول و عرض برابر دارد}} a = -2a + 4 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3} \right) : \text{ محل برخورد مورد نظر}$$

گزینه «۱»

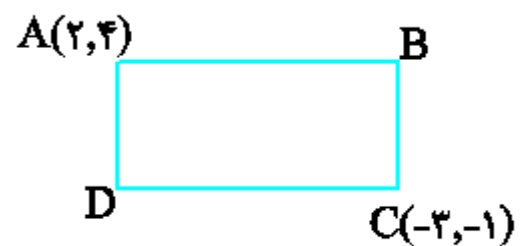
$$2x + 3y = 1 \Rightarrow 3y = -2x + 1 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow m = -\frac{2}{3} \Rightarrow \text{شیب خط عمود } m' = \frac{3}{2}$$

$$y - 3 = \frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

گزینه «۳»

با توجه به شکل زیر داریم:



برای به‌دست آوردن محیط مستطیل، باید طول و عرض مستطیل را به‌دست آوریم.

برای به‌دست آوردن مختصات نقطه B داریم:

$$\begin{cases} m_{AB} = 3 \\ A(2, 4) \end{cases} \rightarrow AB : y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y = 3x - 2$$

$$\begin{cases} m_{BC} = \frac{-1}{m_{AB}} = \frac{-1}{3} \\ C(-3, -1) \end{cases} \quad BC : y - (-1) = \frac{-1}{3}(x - (-3)) \Rightarrow y = \frac{-1}{3}x - 2$$

$$\begin{cases} y = 3x - 2 \\ y = \frac{-1}{3}x - 2 \end{cases} \rightarrow 3x - 2 = \frac{-1}{3}x - 2 \Rightarrow \frac{10}{3}x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_B = 0 \\ y_B = -2 \end{cases} \Rightarrow B(0, -2)$$

محیط مستطیل برابر است با:

$$AB = \sqrt{(4 + 2)^2 + 2^2} = \sqrt{40}$$

$$BC = \sqrt{(-1 - (-2))^2 + (-3 - 0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\text{محیط مستطیل} = 2(\sqrt{10} + \sqrt{40}) = 2(3\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$

گزینه «۴»

ابتدا نقطه A را پیدا می‌کنیم:

$$AB : 3x + y = 2$$

$$AC : 2x + y = -1 \Rightarrow x = 3, y = -7 \Rightarrow A(3, -7)$$

$$BC : x + 2y = 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{شیب خط AH} = 2$$

$$\text{معادله ارتفاع AH: } y - (-7) = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 13$$

در بین گزینه‌ها، تنها نقطه (۴, -۵) در معادله خط AH صدق می‌کند.